12.3.2015.

SEMINAR ZA TEORIJU REPREZENTACIJA: R. Mrđen: Penroseova transformacija

Literatura: R.J. Baston, M.G. Eastwood: The Penrose transform, its interaction with representation theory

Uvod

- Penroseova transformacija se razvila kao dio teorije twistora, koju je razvio Roger Penrose u '60-im, kako bi „opisao" rješenja tzv. „massless field equations".
  (važna klasa jednadžbi iz kvantne teorije polja)

- Penroseova transformacija ~ generalizacija Radonove transformacije na holomorfne situacije.

- Prvotna situacija:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F} \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \mathbb{P}_3 & & \mathbb{M} \\ \cup\!| & & \cup\!| \\ \mathbb{P}^I & & \mathbb{M}^I \end{tikzcd}$$

kompleksni projektivni ($\mathbb{P}_3$)

kompleksificiran kompaktificiran prostor Minkowskog ($\mathbb{M}$)

može se shvatiti kao prostor 1-linija iz $\mathbb{P}_3$,

$x \in \mathbb{M}$ $\quad \eta(\tau^{-1}(x)) \cong \mathbb{P}_1$

V vektorski svežanj na $\mathbb{P}_3$ (pogodno odabran)

ω 1-forma na $\mathbb{P}^I$ s vrijednostima u V

ω možemo integrirati na svakom $\mathbb{P}_x$, i dobiti funkciju na M^I

$$H^1(\mathbb{P}^I, V) \xrightarrow[\cong]{\text{Penroseova transformacija}} \left\{ \begin{array}{c} \text{rješenja Maxwellovih} \\ \text{jednadžbi na } M^I \end{array} \right\}$$

Najopćenitija situacija gdje se u principu može provesti Penroseova transformacija:

$$\begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ Z & & X \end{tikzcd}$$

gdje su F, Z, X glatke mnogostrukosti,

- η, τ glatke submerzije t.d. $F \xrightarrow{\eta \times \tau} Z \times X$ ulaganje
- Z kompleksna mnogostrukost, $\eta(\tau^{-1}(x))$ kompaktna kompleksna podmnogostrukost $\forall x \in X$
- η ima kontraktibilna vlakna.

V holomorfni vektorski svežanj na Z.

$H^r(Z, V) \longleftrightarrow$ rješenja sistema lin. PDJ na X.

(najzanimljiviji slučaj za teoriju reprezentacija, a i može se nešto konkretno izračunati)

Mi ćemo raditi Penroseovu transformaciju za sljedeću situaciju:

$$\begin{tikzcd} & G/Q \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ G/R \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] & & G/P \arrow[d, phantom, sloped, "\supseteq"] \\ Z & & X \end{tikzcd}$$

G poluprosta kompleksna Liejeva grupa,

$P, R, Q = R \cap P$ paraboličke podgrupe

V <u>homogeni</u> vektorski svežanj na G/R

Tada Penroseova transformacija daje opis

$H^r(Z, V)$ preko jezgri i kojezgri <u>invarijantnih</u> diferencijalnih operatora na X.

Veza se može koristiti u oba smjera:
- za računanje kohomologije
- i za konstruiranje/klasifikaciju invarijantnih dif. operatora.

Zašto nam je to zanimljivo?

Postoji korespondencija (kontravarijantna)

homogeni svežnjevi na G/P $\longleftrightarrow$ generalizirani Vermaovi moduli

$$\left\{\begin{array}{l}\text{invarijantni diferencijalni} \\ \text{operatori između} \\ \text{homogenih svežnjeva}\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{homomorfizmi} \\ \text{gen. Vermaovih} \\ \text{modula.}\end{array}\right\} \quad (*)$$

Klasifikacija (*) je davno riješena ako je P = Borelova podgrupa.
Inače za pravu paraboličku, osim „standardnih" homomorfizama
javljaju se i tzv. „nestandardni" koji se još uvijek nisu
klasificirali.

Ispada da Penroseova transformacija često daje te nestandardne
homomorfizme.

Može se koristiti za konstrukciju BGG-rezolucija modula koji nisu
konačno-dimenzionalni.

Druga zanimljiva strana o Penroseovoj transformaciji:
Može se definirati potpuno algebraizirana verzija Penroseove transformacije
kao određen derivirani funktor na deriviranim kategorijama.
U tom kontekstu je Penroseova transformacija jako
blisko povezana s deriviranim Zuckermanovim funktorom
iz kohomološke indukcije.

Osnovni pojmovi i oznake

- $\mathfrak{g}$ kompleksna poluprosta Liejeva algebra
  G pripadna povezana, jednostavno povezana kompleksna Liejeva grupa.

- $\mathfrak{h} \subseteq \mathfrak{g}$ Cartanova podalgebra

$\Delta = \Delta(\mathfrak{g}) = \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ sistav korjena

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Delta} \mathfrak{g}_\alpha \qquad \text{korjenski sustav}$$

- $\langle -, - \rangle$ Killingova forma na $\mathfrak{h}$ i $\mathfrak{h}^*$

- $S \subseteq \Delta^+ \subseteq \Delta$ fiksirani baza i sistem pozitivnih korjena.
  $\mathfrak{b} := \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, standardna Borelova podalgebra, $\mathfrak{n} := \bigoplus_{\alpha \in \Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$

(svaka Borelova (= maksimalna rješiva) podalgebra je G-konjugirana standardnoj)

- $S_p \subseteq S$ proizvoljan

$$\Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h}) := (\operatorname{span}_{\mathbb{Z}} S_p) \cap \Delta(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$$

$$\mathfrak{l} := \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha \,,$$ reduktivna podalgebra od $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{l} = \underbrace{[\mathfrak{l},\mathfrak{l}]}_{\substack{\| \\ \mathfrak{l}_S \\ \text{poluprosta}}} \oplus \underbrace{\mathfrak{l}_Z}_{\substack{\| \\ \text{centar}}} \supseteq \mathfrak{h}$$ Cartanova u $\mathfrak{l}$

$$\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h}) := \Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h}) \setminus \Delta(\mathfrak{l},\mathfrak{h})$$

$$\mathfrak{u} := \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{h})} \mathfrak{g}_\alpha$$ nilpotentna podalgebra

$$\mathfrak{p} := \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{u} \supseteq \mathfrak{b}$$ (standardna parabolička podalgebra, Levijeva dekompozicija)

(Svaka parabolička (= sadrži Borelovu) podalgebra je G-konjugirana standardnoj paraboličkoj, za neki S_p)

$$\mathfrak{u}_- := \bigoplus_{\alpha\in\Delta(\mathfrak{u},\mathfrak{l})} \mathfrak{g}_{-\alpha} \,, \qquad \mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{u}_- \oplus \overbrace{\mathfrak{l}}^{}}_{\mathfrak{p}_-}\!\!\overbrace{\;\oplus\, \mathfrak{u}}^{\mathfrak{p}}$$

• Zapis standardne paraboličke podalgebre:

U Dynkinovom dijagramu za $\mathfrak{g}$ stavimo $\times$ na vrhove koji odgovaraju prostim korijenima iz $S \setminus S_p$.

<u>Primjer:</u>

$$\bullet\!-\!\times\!-\!\bullet \;=\; \left\{ \left(\begin{array}{cc|cc} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ \hline 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & * & * \end{array}\right) \in sl(4, \mathbb{C}) \right\}$$

$$\times\!-\!\bullet\!-\!\bullet \;=\; \left\{ \left(\begin{array}{c|ccc} * & * & * & * \\ \hline 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \\ 0 & * & * & * \end{array}\right) \in sl(4, \mathbb{C}) \right\}$$

$\mathfrak{l}$ = dijagonalni blokovi, $\mathfrak{u}$ = ostatak (gore-desno)

• Dynkinov dijagram za $\mathfrak{l}$ dobijemo tako da maknemo sve $\times$-eve i pripadne bridove. $\mathfrak{l}$ još sadrži i centar koji je $\underbrace{|S \setminus S_p|}_{}$-dimenzionalan

$\quad\quad\quad\quad$ = broj prekriženih vrhova.

• $P := \{ g \in G : Ad(g)(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{p} \} \leq G$ standardna parabolička podgrupa.

P zatvorena povezana kompleksna podgrupa,
ima Liejevu algebru $\mathfrak{p}$,
$N_G(P) = P$.

$G/P \equiv \{$ paraboličke podgrupe od G koje G-konjugirane s $P \}$

generalizirana kompleksna mnogostrukost zastava

Svojstva: Jednostavno povezana kompaktna kompleksna mnogostrukost,
projektivna mnogostrukost ($\Rightarrow$ Kählerova)
(konstruirat ćemo kasnije)

Oznaka za G/P ista kao i za $\mathfrak{p}$.

Primjeri

V kon. dim. v.p. / $\mathbb{C}$

- $F_c(V) = \{(V_1 \subseteq V_2 \subseteq \dots \subseteq V_n = V) \ : \ \dim V_i = i\}$ $\quad$ $SL(V)$ djeluje na $F_c(V)$

(potpune zastave)

$\{e_1, \dots, e_n\}$ baza za V, $\quad V_i^0 = \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\{e_1, \dots, e_i\}$

$A \in SL(V)$ stabilizira $(V_i^0)_{i=1..n} \iff A$ gornjetrokutasta u toj bazi.

$SL(V)$ djeluje tranzitivno na $F_c(V)$

$\Downarrow$

$$F_c(V) \cong SL(V) / \{\text{gornje trokutaste}\} \quad = \quad$$ 

$$X = F_c(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}_1$$

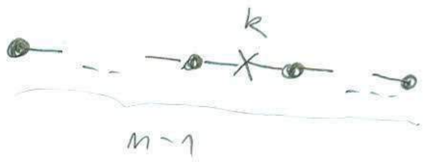
- Malo općenitije

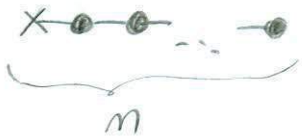
$0 < i_1 < \dots < i_k < n = \dim V$ fiksiran niz u $\mathbb{N}$.

$F_{(i_1, \dots, i_k)}(V) = \{(V_{i_1} \subseteq \dots \subseteq V_{i_k} \subseteq V) : \dim V_{i_j} = i_j\}$ (djelomične zastave)

slično kao i prije, vidimo:

$$F_{(i_1, \dots, i_k)}(V) \cong SL(V) \Big/ \left\{ \begin{pmatrix} \underbrace{*}_{i_1 \times i_1} & * & * \\ 0 & \underbrace{*}_{(i_2-i_1)\times(i_2-i_1)} & * \\ 0 & 0 & \underbrace{*}_{(n-i_k)\times(n-i_k)} \end{pmatrix} \right\} \quad =$$ 

Posebno: $Gr_k(V) \cong$ 

$\mathbb{P}_n = Gr_1(\mathbb{C}^{n+1}) =$ 

- $\mathbb{C}S^{2n} =$  $(n+1 \text{ vrh})$

  $\mathbb{C}S^{2n+1} =$  $(n+1 \text{ vrh})$

U teoriji twistora važan je $M := \mathbb{C}S^4 = Gr_2(\mathbb{C}^4) =$ 

(kompleksificiran, kompaktificiran prostor Minkowskog)

$N :=$ 

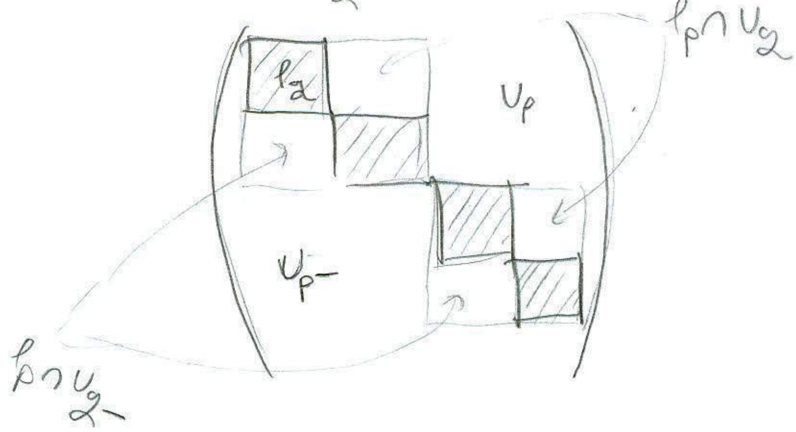
(prostor ambitwistora)

Penrose ovdje radio transformaciju.

- Fibracije generaliziranih mnogostrukosti zastava

$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}$ standardne paraboličke podalgebre.

Vrijedi: $\mathfrak{g} = \underbrace{\mathfrak{u}_{\mathfrak{p}^-} \oplus (\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}^-})}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}^-}} \oplus \overbrace{\mathfrak{l}_{\mathfrak{q}} \oplus \underbrace{(\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}) \oplus \mathfrak{u}_{\mathfrak{p}}}_{\mathfrak{u}_{\mathfrak{q}}}}^{\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}}}$



$Q \subseteq P \Rightarrow G/Q \xrightarrow{\tau} G/P$ fibracija

s vlaknima $P/Q \cong L_P/L_P \cap Q \cong (L_P)_s / (L_P)_s \cap Q$

L_P reduktivna, $(L_P)_s$ njen poluprosti dio, $(L_P)_s \cap Q$ parabolička podgrupa u $(L_P)_s$.

$\Rightarrow$ vlakna fibracije su također generalizirane mnogostrukosti zastava, s dijagramom kojeg dobijemo tako da:

Iz dijagrama za G/Q izbrišemo one ,x' koji su istovremeno ,x' i u G/P. Nakon toga izbrišemo sve komponente povezanosti koje nemaju ,x'.

<u>Primjeri</u>

ima vlakno (x x) $\cong \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$

ima vlakno 

Radit ćemo Penroseovu transformaciju na dvostrukoj fibraciji :

$$\begin{tikzcd} & G/Q \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ G/R & & G/P \end{tikzcd}$$

gdje su R, P standardne paraboličke podgrupe, $Q = R \cap P$ (tada je i Q standardna parabolička podgrupa).

Dijagram za G/Q se dobije tako da se prekriže svi vrhovi koji su prekriženi u G/R ili u G/P.

Homogeni vektorski svežnjevi

$S=\{\alpha_j\}$ baza, dualna baza = fundamentalne težine $\{\lambda_j\}$

$$\langle \lambda_i, \alpha_j^\vee\rangle = \frac{2\langle\lambda_i,\alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j,\alpha_j\rangle} = \delta_{ij} \qquad (\lambda_i \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} = \mathrm{span}_{\mathbb{R}}\Delta)$$

$\forall \lambda\in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$

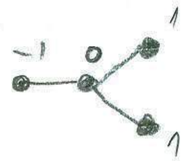
$$\lambda = \sum_i \langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\lambda_i$$

λ integralan $\iff \langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\in\mathbb{Z}\quad \forall i$

λ dominantan $\iff \langle\lambda,\alpha_i^\vee\rangle\geq 0\quad \forall i$

Zapis težine λ: iznad vrha koji odgovara korijenu α pišemo broj $\langle\lambda,\alpha^\vee\rangle$

Primjeri:



,

, $\delta :=$ polusuma pozitivnih korijena ima 1 na svakom vrhu.

Teorem

$$\left\{\begin{array}{c}\lambda \text{ integralne}\\ \text{dominantne}\\ \text{težine}\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{\begin{array}{c}\text{konačno dim.}\\ \text{ired. reprezentacija}\\ \text{od } \mathfrak{g}\\ \text{s najvećom težinom}\\ \lambda\end{array}\right\}$$

V $\updownarrow$ V^* (kontragredijentna repr.)

$$\left\{\begin{array}{c}\text{kon. dim. ired. reprezentacija}\\ \text{s najmanjom težinom } -\lambda,\\ \left(\text{tj. najvećom težinom } -w_0\lambda \atop \text{gdje je } w_0\in W_{\mathfrak{g}} \text{ najdulji element}\right)\end{array}\right\}$$

Dogovor:

Zapis integralne dominantne težine λ nam također označava i ired. kon. dim. repr. od $\mathfrak{g}$ s najmanjom težinom $-\lambda$.

$=: E(\lambda)$ (reprezentacija od $\mathfrak{g}$ ili G)

Propozicija

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Kon. dim. ired. repr.} \\ \text{od } \mathfrak{p} = \mathfrak{l} + \mathfrak{u} \\ \text{(s najmanjom težinom } -\lambda)\end{array}\right\} \overset{1-1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}\lambda \in \mathfrak{h}^* \text{ integralni} \\ \text{i dominantni za } \mathfrak{l}_s\end{array}\right\}$$

(Engelov tm $\Rightarrow$ $\mathfrak{u}$ nužno djeluje trivijalno)

Dodatno, takva reprezentacija od $\mathfrak{p}$ se eksponencira na reprezentaciju paraboličke podgrupe P,

ako i samo ako λ integralan za cijeli $\mathfrak{g}$.

(od sada to stalno pretpostavljamo)

oznaka $E_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ (reprezentacija od $\mathfrak{p}$ ili P)

$\updownarrow$ 1-1

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ integralan za $\mathfrak{g}$ i dominantan za $\mathfrak{p}$.

$\pi : P \to \mathrm{End}(V)$ reprezentacija na kon. dim. v. p. nad $\mathbb{C}$.

Homogeni vektorski svežanj je:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} := G \times_P V & = \text{prostor orbita } P\text{-djelovanja na } G \times V & \\ \big\downarrow q & [(g,v)] & p.(g,v) = (gp, \pi(p^{-1})v) \\ G/P & \downarrow & \\ & gP & \end{array}$$

holomorfni vektorski svežanj s vlaknom V i G-djelovanjem slijeva.

- Prerezi homogenog svežnja:

$$G \xrightarrow{r} G/P, \quad U \overset{\text{otv}}{\subseteq} G/P$$

$$\Gamma(U, \mathcal{V}) = \mathcal{O}_V(U) := \{ h : U \to \mathcal{V} \text{ holomorfno},\ q h = 1_U \}$$

$$\cong \{ f : \underset{\subseteq G}{r^{-1}(U)} \to V \text{ holomorfno},\ f(gp) = \pi(p^{-1}) f(g) \quad \forall p \in P,\ g \in G \}$$

(veza je: $h(gP) = [(g, f(g))]$)

- $\mathcal{O}_V$ je snop $\mathcal{O}_{G/P}$-modula na G/P, lokalno slobodan konačnog ranga.
(zovemo ga homogeni snop)
(takvi su u 1-1 korespodenciji s vektorskim svežnjima)
($\Rightarrow$ konstantnog ranga, koherentan)

- G djeluje na globalnim prerezima $\Gamma(G/P, \mathcal{V})$
$(g.f)(g_0) = f(g^{-1} g_0)$ (ili $(g.h)(g_0 P) = g.h(g^{-1} g_0 P)$) (> klasično ...)

• Ako krenemo od $V = \mathbb{C}$, $\pi = \text{triv}$:

$$G \times_P \mathbb{C} \cong G/P \times \mathbb{C} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{O}_\gamma = \mathcal{O}_{G/P}$$ strukturni snop holomorfnih funkcija.

• Ako krenemo od G-modula V i restringiramo ga na P-modul, tada se homogeni svežanj trivijalizira:

$$\begin{tikzcd}
G \times_P V \arrow[rr, "{[(g,v)] \mapsto (gP, gv)}", "\cong"'] \arrow[dr] & & G/P \times V \arrow[dl] \\
& G/P &
\end{tikzcd}$$

G djeluje slijeva na oba faktora.

(nije trivijalan kao homogeni svežanj)

Notacija: $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ integralna za $\mathfrak{g}$, dominantna za $\mathfrak{p}$ (tj. $\mathfrak{l}_s$)

$E_\mathfrak{p}(\lambda)$ kon. dim. ired. rep. od P s najmanjom težinom $-\lambda$

$\mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda) := \mathcal{O}_{E_\mathfrak{p}(\lambda)}$ = svežanj ili pripadni snop prereza nad G/P pridružen reprezentaciji $E_\mathfrak{p}(\lambda)$

(oznaka kao i za $E_\mathfrak{p}(\lambda)$)

Primjeri: Holomorfni tangencijalni svežanj na G/P:

$$T^{(1,0)}(G/P) \cong G \times_P (\mathfrak{g}/\mathfrak{p}) = \mathcal{O}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$$ P djeluje na $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ s Ad.

Holomorfni kotangencijalni svežanj:

$$\Omega^1(G/P) \cong \left(\mathcal{O}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\right)^* \cong \mathcal{O}_{(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^*} \cong \mathcal{O}_\mathfrak{u}$$ (Killingova forma: $(\mathfrak{g}/\mathfrak{p})^* \cong \mathfrak{u}$)

Želimo računati kohomologije homogenih svežnjeva.

Trebaju nam:
- Bott-Borel-Weil
- Bernstein-Gelfand-Gelfand rezolucija (BGG)
- određeni spektralni nizovi

(Bott-Borel-Weil i BGG rezolucija) koriste kombinatoriku Weylove grupe

Primjeri: Diferencijalne forme na M :

$$\Omega^1 = \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\Omega^2 = \overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \oplus \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{2}{\bullet}$$

$$\Omega^3 = \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-4}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\Omega^4 = \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-4}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

17.3.2015.

Weylova grupa
Hasseov dijagram parabolične podalgebre

$$W_{\mathfrak{g}} = \langle \sigma_\alpha : h^*_{\mathbb{R}} \to h^*_{\mathbb{R}} \ : \ \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, h) \rangle = \langle \sigma_\alpha : \alpha \text{ prost} \rangle$$

σ_α = refleksija s obzirom na zid W_α = hiperravnina $\{\alpha\}^\perp$

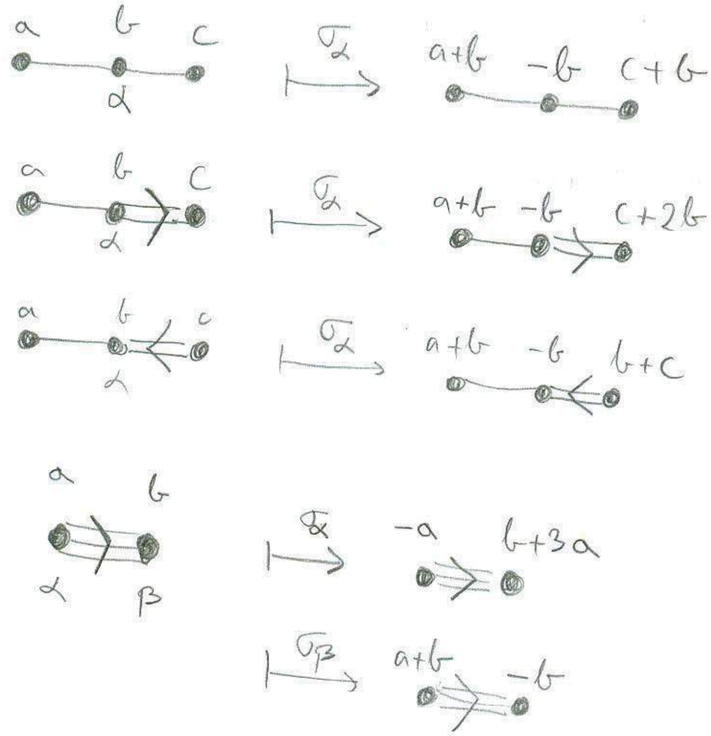
$$\sigma_\alpha(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle \alpha$$

Koeficijenti u Dynkin-dijagram zapisu od $\sigma_\alpha(\lambda)$, α prost.

β prost, $\langle \sigma_\alpha \lambda, \beta^\vee \rangle = \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \underbrace{-\langle \alpha, \beta^\vee \rangle}\langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$

broj spojnica između α i β, ako $\|\alpha\| > \|\beta\|$, inače $= 1$.

$\Rightarrow$



Bruhatov uređaj

Za $w \in W_{\mathfrak{g}}$ definiramo $l(w) \in \mathbb{N}_0$ kao najmanji broj t.d.

$w =$ kompozicija $l(w)$ refleksija definiranih prostim korijenima.
(takav prikaz (reducirana forma) nije jedinstven)

Pišemo $w \longrightarrow w'$, ako $\begin{cases} l(w') = l(w) + 1 \\ w' = \sigma_\alpha \cdot w, \text{ za neki } \alpha \in \Delta(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}) \end{cases}$
(ne nužno prost)

Bruhatov uređaj = proširenje po tranzitivnosti relacije $\rightarrow$.

$W_{\mathfrak{g}}$ postaje usmjeren graf.
Kako ga odrediti? Po definiciji previše posla.

$W_{\mathfrak{g}}$ djeluje prosto tranzitivno na Weylove komore.
Izaberemo regularnu težinu (tj. nije ni u jednom zidu), npr. ρ

$W_{\mathfrak{g}} \xleftrightarrow{1-1}$ orbita od ρ

Lema (Bernstein, Gelfand, Gelfand)
Ako $w \longrightarrow w'$, tada reduciranu formu od w možemo dobiti od bilo koje reducirane forme od w' ispuštanjem jednog (ne bilo kojeg) elementa.
Ako $l(w') = l(w) + 1$, i reducirana forma od w se može dobiti od neke reducirane forme od w' ispuštanjem jednog elementa, tada $w \longrightarrow w'$.

Primjer: $sl(3,\mathbb{C}) = \underset{\alpha_1\quad\alpha_2}{\circ\!-\!\!-\!\circ}$

(i) := refleksija definirana s α_i
$(i_1 \ldots i_j) := (i_1) \ldots (i_j)$

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{-1\quad 2}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \arrow[r, mapsto, "(2)"] & \overset{1\quad -2}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \arrow[dr, mapsto, "(1)"] & \\
\rho = \overset{1\quad 1}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \arrow[ur, mapsto, "(1)"] \arrow[dr, mapsto, "(2)"'] & & & \overset{-1\quad -1}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \\
 & \overset{2\quad -1}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \arrow[r, mapsto, "(1)"] & \overset{-2\quad 1}{\bullet\!-\!\!-\!\bullet} \arrow[ur, mapsto, "(2)"'] &
\end{tikzcd}
$$

$$
W_g = \left\{
\begin{tikzcd}
 & (1) \arrow[r] \arrow[dr, dashed] & (21) \arrow[dr] & \\
id \arrow[ur] \arrow[dr] & & & (121) = (212) \\
 & (2) \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & (12) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
\right\}
$$

Napravio sam i za $sl(4,\mathbb{C})$.

Osim običnog djelovanja od W na $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ imamo i afino djelovanje:

$$w.\lambda := w(\lambda+\rho) - \rho$$

λ je singularna, ako ima netrivijalan stabilizator za afino djelovanje
$\iff$ $\lambda+\rho$ se nalazi u nekom zidu.

Inače nesingularna ($\lambda+\rho$ nije u zidu)

$\neq$

regularna (λ nije u zidu)

($-\rho$ je regularna i singularna)

$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \dotplus \mathfrak{u} \subseteq \mathfrak{g}$ standardna parabolička podalgebra.

Hasseov dijagram od $\mathfrak{p}$ je puni podgraf od $W_{\mathfrak{g}}$ s vrhovima

$$W^{\mathfrak{p}} := \left\{ w \in W_{\mathfrak{g}} : \left\{ \begin{array}{l} \text{dominantne} \\ \text{težine za } \mathfrak{g} \end{array} \right\} \xrightarrow{w} \left\{ \begin{array}{l} \text{dominantne} \\ \text{težine za } \mathfrak{p} \end{array} \right\} \right\}$$

$$= \{ w \in W_{\mathfrak{g}} : \underbrace{\Delta(w)}_{\{\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g}) \,:\, w^{-1}\alpha < 0\}} \subseteq \Delta(\mathfrak{u}) \}$$

Za konstruiranje Hasseovog dijagrama koristimo dvije leme

<u>Lema</u> [Kostant] Svaki $w \in W_{\mathfrak{g}}$ ima jedinstvenu dekompoziciju

$$w = w_{\mathfrak{p}} w^{\mathfrak{p}} \quad \text{td} \quad w_{\mathfrak{p}} \in W_{\mathfrak{p}} := \langle \sigma_\alpha : \alpha \in \Delta(\mathfrak{l}, \mathfrak{h}) \rangle = W_{\mathfrak{l}}, \quad w^{\mathfrak{p}} \in W^{\mathfrak{p}}$$

Nadalje, $\ell(w) = \ell(w_{\mathfrak{p}}) + \ell(w^{\mathfrak{p}})$, i $w^{\mathfrak{p}}$ ima najmanju duljinu iz $W_{\mathfrak{p}} w^{\mathfrak{p}}$, i jedinstven je s tom duljinom u $W_{\mathfrak{p}} w^{\mathfrak{p}}$.

Dakle, $W^{\mathfrak{p}} \sim \underline{W_{\mathfrak{p}} \backslash W_{\mathfrak{g}}}$

uzmemo predstavnike najmanjih duljina desnih klasa

<u>Lema</u> $\delta^{\mathfrak{p}} := \sum\limits_{\alpha_i \in S \setminus S_{\mathfrak{p}}} \lambda_i$ (ima 1 iznad prekriženih vrhova, 0 iznad ostalih)

Stabilizator od od $\delta^{\mathfrak{p}}$ u $W_{\mathfrak{g}}$ je $W_{\mathfrak{p}}$.

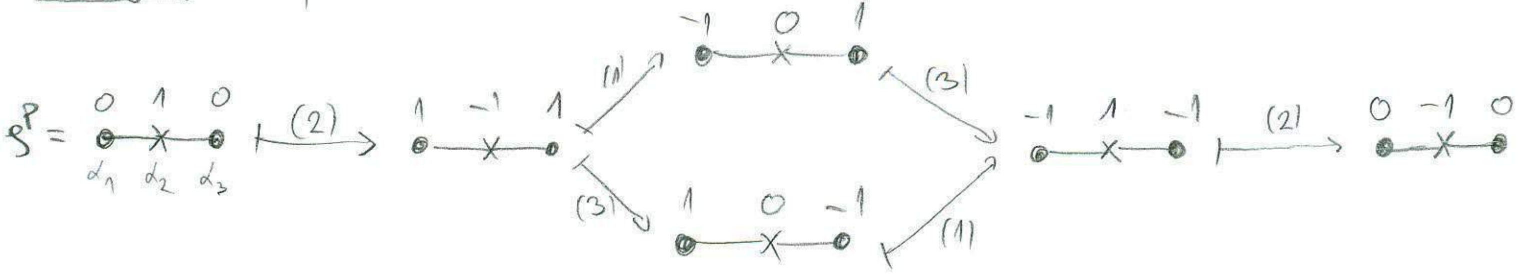
Dakle, orbita desnog djelovanja od W_g:

$$(\rho^P, w) \longmapsto w^{-1}\rho^P$$

je u 1-1 korespodenciji s W^P.

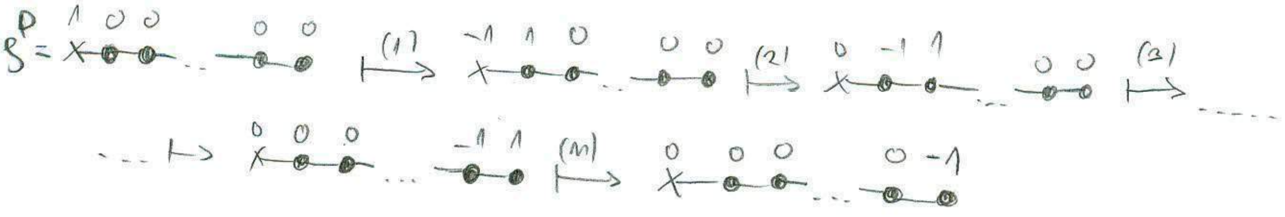
Računamo W_g-orbitu od ρ^P.
Dobivenim predstavnicima uzmemo reduciranu formu u suprotnom poretku (to mu je inverz)

<u>Primjer</u> $p =$  (Minkowski)



$$\Rightarrow W^P = \left\{ \begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small] & & (21) \arrow[dr] & & & \\ id \arrow[r] & (2) \arrow[ur] \arrow[dr] & & (213)=(231) \arrow[r] & (2132)=(2312) \\ & & (31) \arrow[ur] & & & \end{tikzcd} \right\}$$

<u>Primjer</u> $p =$  ($\mathbb{P}_n$)



$$\Rightarrow W^P = \{ id \to (1) \to (12) \to (123) \to \dots \to (123\ldots n-1) \to (123\ldots n)\}$$

Trebati će nam relativan slučaj prethodne priče:

$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{g}$ paraboličke podalgebre.

$G/Q \longrightarrow G/P$ fibracija s vlaknima $(L_P)_s / (L_P)_s \cap Q$

$W_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}}$ = Hasseov dijagram Lijeve algebre $(\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}})_s \cap \mathfrak{q}$ u $(\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}})_s$

$\cong W_{\mathfrak{q}} \backslash W_{\mathfrak{p}}$

$W_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} \subseteq W_{\mathfrak{l}_{\mathfrak{p}}} \subseteq W_{\mathfrak{g}}$.

Snopovi

Snop F na topološkom prostoru X je pridruživanje (funktor!)

$$\forall \underset{X}{\underset{\cap}{U}}{}^{\text{otv}} \longmapsto FU \quad \text{Abelova grupa}$$

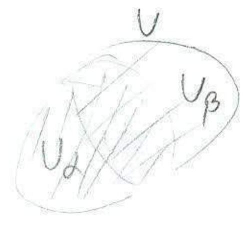
$$(U \subseteq V) \longmapsto \begin{array}{c} FV \\ \big\downarrow \\ FU \end{array} \quad \text{homomorfizam grupa}$$

(zovemo i označavamo restrikcija)

td $\left\{ \begin{array}{l} U \subseteq V \subseteq W \\ \qquad \big\downarrow \\ \begin{tikzcd} & FW \arrow[dl] \arrow[dd] \\ FV \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "\circlearrowleft"] & \\ & FU \end{tikzcd} \\ U \subseteq U \mapsto FU \xrightarrow{id} FU \end{array} \right.$

\+ aksiom snopa: $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ pokrivač, $s_\alpha \in F(U_\alpha)$

td $s_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta} = s_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta}$



tada $\exists!\, s \in FU$ td $s|_{U_\alpha} = s_\alpha$.

Morfizam snopova $F \xrightarrow{\alpha} G$ je kolekcija homomorfizama grupa

$\forall U \overset{\text{otv}}{\subseteq} X \quad FU \xrightarrow{\alpha_U} GU$ td $U \subseteq V \Rightarrow$

$$\begin{tikzcd} FV \arrow[r, "\alpha_V"] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & GV \arrow[d] \\ FU \arrow[r, "\alpha_U"] & GU \end{tikzcd}$$

(prirodna transformacija)

Primjer: strukturni snop $\mathcal{O}_X$ kompleksne mnogostrukosti X
(glatke, topološke, algebarske)

$$\mathcal{O}_X(U) := \{ f : U \to \mathbb{C} \; : \; f \text{ holomorfna} \}$$
(glatka, neprekidna, regularna)

$\mathcal{O}_X$ je također snop prstenova.

F snop na X. Ako je svaki FU također i $\mathcal{O}_X(U)$-modul (tako da je djelovanje usklađeno s restrikcijama), kažemo da je F $\mathcal{O}_X$-modul (ili snop $\mathcal{O}_X$-modula)

Primjer:
$$\begin{array}{c} E \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$
vektorski svežanj, $FU := \{ s : U \to E : \pi s = 1_U \}$

F je $\mathcal{O}_X$-modul (lokalno slobodan, jer je vektorski svežanj lokalno $U \times \mathbb{C}^n$
$$\begin{array}{c} U \times \mathbb{C}^n \\ \downarrow \uparrow \\ U \end{array}$$

$$\Rightarrow FU \cong (\mathcal{O}_X U)^n \Big)$$

lokalno slobodni snopovi (konačnog konstantnog ranga) $\xleftrightarrow{1-1}$ vektorski svežnjevi (konačnih, nad povezanim prostorom)

Funktor globalnih prereza: $\Gamma : \{\text{snopovi na } X\} \longrightarrow \{\text{Abelove grupe}\}$
$$F \longmapsto FX = \Gamma(X, F)$$

to je specijalan slučaj općenitije konstrukcije:

$$X \xrightarrow{f} Y \quad \longmapsto \quad
\begin{tikzcd}
\left\{\begin{matrix}\text{snopovi} \\ \text{na } X\end{matrix}\right\} \arrow[r, bend left, "f_* \text{ direktna slika}"] & \left\{\begin{matrix}\text{snopovi} \\ \text{na } Y\end{matrix}\right\} \arrow[l, bend left, "f^{-1} \text{ inverzna slika}"]
\end{tikzcd}$$

F snop na X

$V \overset{\text{otv}}{\subseteq} Y$, definiramo $(f_*F)(V) := F(f^{-1}(V))$

(Ako je $X \xrightarrow{f} \{*\}$, onda $f_*F = \Gamma(X,F)$

Obratno, G snop na Y, $U \overset{\text{otv}}{\subseteq} X$

$$(f^{-1}G)(U) \overset{?}{=} G(\underbrace{f(U)}_{\substack{\text{nije} \\ \text{nužno} \\ \text{otvoren}}})$$

$$(f^{-1}G)(U) \overset{?}{=} \operatorname*{colim}_{V \overset{\text{otv}}{\supseteq} f(U)} G(V)$$ ← ne zadovoljava aksiom snopa

$$f^{-1}G := \text{Snopifikacija}\Big(U \longmapsto \operatorname*{colim}_{V \overset{\text{otv}}{\supseteq} f(U)} GV\Big)$$

univerzalan način da se od predsnopa napravi snop.

Poseban slučaj inverzne slike:
$X \overset{i}{\hookrightarrow} Y$ podskup
$i^{-1}G =: G|_X$ zovemo restrikcija snopa.
Restrikcija na točku = vlat snopa u toj točki.

Vrijedi adjunkcija $f^{-1} \dashv f_*$, f^{-1} je egzaktan, f_* samo lijevo egzaktan. Pa mu možemo gledati desno derivirane funktore.

Desni derivirani funktori od f_* :

F snop na X,

$\exists$ $0 \to F \to I^0 \to I^1 \to \ldots$ (injektivna rezolucija)

egzaktan niz snopova na X t.d. $Hom(-, I^i)$ egzaktan funktor

$0 \to f_* I^0 \to f_* I^1 \to \ldots$

$$\underbrace{(R^i f_*)}_{f_*^i}(F) := H^i(f_* I^\bullet) = Ker(f_* I^i \to f_* I^{i+1}) \big/ Im(f_* I^{i-1} \to f_* I^i)$$

(pokaže se da se može uzeti i puna šira klasa, tzv. acikličke rezolucije.)

- f_*^i aditivan funktor, ne ovisi o izboru rezolucije
- $f_*^i \cong f_*$
- Kohomologija snopa $F = H^i(X, F) := \Gamma^i(F)$
  - $\hookrightarrow$ poopćenje singularne, Čechove, de Rhamove, Dolbeaultove kohomologije.

- Vrijedi $H^0(X, F) = \Gamma(X, F)$

  $f_*^i F = \text{snopifikacija}\left(U \mapsto H^i(f^{-1}U, F)\right)$

Derivacija kompozicije funktora (Grothendieckov spektralni niz)

$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$ aditivni lijevo egzaktni i

F čuva injektivne objekte.

$A \in \mathcal{C}$

Postoji spektralni niz

$$E_2^{pq} = (R^pG \circ R^qF)(A) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(A)$$

Poseban slučaj: <u>Lerayjev spektralni niz</u>

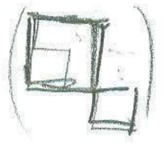
$$\begin{tikzcd} \mathrm{AbSh}(X) \arrow[r, "f_*"] \arrow[dr, "\Gamma"'] & \mathrm{AbSh}(Y) \arrow[d, "\Gamma"] \\ & \mathrm{Ab} \end{tikzcd}$$

čuva injektivne objekte jer je desni adjungirani egzaktnom funktoru f^{-1}.

$$E_2^{pq} = H^p(Y, f_*^q F) \Longrightarrow H^{p+q}(X, F)$$

$$f_*^q(F)$$

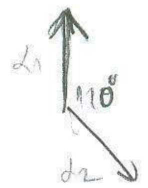
Napomena: $\rho^{\vee} \neq \rho^{q}$ općenito (iako su okomiti na iste proste korijene)

npr. na $\underset{\alpha_1}{\bullet} - \underset{\alpha_2}{\times}$ = 

$\rho^{q} = \overset{0}{\bullet} - \overset{1}{\times}$, $\rho^{\vee} = \frac{1}{2}\left((\alpha_1+\alpha_2) + \alpha_2\right)$

$= \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2$

$$\langle \rho^{\vee}, \alpha_2^{\vee} \rangle = \frac{2\langle \frac{1}{2}\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 \rangle}{\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle} = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle + \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle\right)$$



$$= 2 \cdot \left(-\frac{1}{4} + 1\right) = \frac{3}{2}$$

$\rho^{\vee}$ nije integralna!

24.3.2015

Bott - Borel - Weil teorem

Lak način za računanje kohomologije homogenih snopova na generaliziranim mnogostrukostima zastava je:

<u>Teorem</u> (BBW) G kompleksna, povezana, jednostavno povezana poluprosta Liejeva grupa

P parabolička podgrupa

λ težina integralna za G, dominantna za P

- Ako je λ singularna za $\mathfrak{g}$, tada $H^r(G/P, \mathcal{O}_P(\lambda)) = 0 \quad \forall r.$
- Ako je λ nesingularna za $\mathfrak{g}$, tada $\exists!\, w \in W_{\mathfrak{g}}$ td $w.\lambda$ dominantan za $\mathfrak{g}$, i

$$H^r(G/P, \mathcal{O}_P(\lambda)) \cong \begin{cases} E(w.\lambda) & ; \ r = l(w) \quad \text{(kao } G\text{-modul)} \\ 0 & ; \ \text{inače} \end{cases}$$

Napomena: opisi djelovanje na kohomologiji

Uočimo da za w iz teorema mora biti $w^{-1} \in W^P$:

$\alpha \in \Delta(w^{-1}) \Rightarrow \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g})$ td $w\alpha < 0 \quad \overset{?}{\Rightarrow} \alpha \in \Delta(\mathfrak{u})$

Ako $\alpha \in \Delta^+(\mathfrak{l})$

$$0 > \langle \underset{\substack{\wedge \\ 0}}{w\alpha}, \underbrace{w.\lambda + \rho}_{\substack{\text{strogo} \\ \text{dominanta} \\ \text{za } \mathfrak{g}}} \rangle = \langle \alpha, w^{-1} w(\lambda+\rho) \rangle = \langle \underset{\substack{\vee \\ 0}}{\alpha}, \underbrace{\lambda + \rho}_{\substack{\text{strogo} \\ \text{dominanta} \\ \text{za } \mathfrak{l}}} \rangle > 0 \implies \in$$

dokaz :

Prvo se dokaže slučaj: $G/P = X_1$ tj. $G = SL(2,\mathbb{C})$

$\cong \mathbb{P}_1$ (Riemannova sfera) $P = $ Borelova $\left\{\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}\right\}$

Integralne težine za G su $k \in \mathbb{Z}$, sve su dominantne za P, $\rho = 1$

Singularni za G su samo $k = (-1)$, ostali nesingularni.

Kad se raspiše definicija, $\mathcal{O}\left(\overset{k}{\times}\right) = \mathcal{O}(k) = \begin{cases} \text{snop funkcija} \\ \text{homogenih stupnja } k \text{ na } \mathbb{P}^1 \end{cases}$

$$H^0\left(\overset{k}{\times}\right) = \Gamma(\mathcal{O}(k)) \cong \begin{cases} \mathbb{C}[x,y]_k \text{ homogeni stupnja } k = \text{reprezentacija od } SL(2,\mathbb{C}) \text{ najveće težine } k = \overset{k}{\bullet} & \text{za } k \geq 0 \\ 0 \ : \ k < 0 & \text{(Liouvilleov teorem)} \end{cases}$$

(Bruhatova dekompozicija, Hartogov teorem, Laurentov razvoj)

$$H^1\left(\overset{k}{\times}\right) \xrightarrow[\text{dualnost}]{\text{Serreova}} H^0\left(\underset{\substack{\text{IS} \\ \Omega^1 \cong \mathcal{O}_V = \overset{-2}{\times}}}{\overset{\text{kanonski snop}}{K}} \otimes \left(\overset{k}{\times}\right)^*\right)^* = H^0\left(\overset{-2}{\times} \otimes \overset{-k}{\times}\right)^* = H^0\left(\overset{-k-2}{\times}\right)^*$$

$$\underset{(-1)\in W}{\overset{\text{kao } SL(2,\mathbb{C}) \text{ moduli}}{\cong}} H^0\left(\overset{-k-2}{\times}\right) = \begin{cases} \mathbb{C}[x,y]_{-k-2} = \overset{-k-2}{\bullet} & : k \leq -2 \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

Dobili smo :

$k \geq 0$	$k < -1$	$k = -1$
$H^0(\overset{k}{X}) = \overset{k}{\bullet}$	$H^0(\overset{k}{X}) = 0$	$H^0(\overset{k}{X}) = 0$
$H^1(\overset{k}{X}) = 0$	$H^1(\overset{k}{X}) = \overset{-k-2}{\bullet} = E((-1).k)$	$H^1(\overset{k}{X}) = 0$

$(-1) \in W$ daje 1, refleksija oko prostog korijena

$$(-1).k = (-1)(k+1) - 1$$
$$= -k-2$$

Dakle teorem vrijedi za $G = SL(2,\mathbb{C})$.

Zatim se teorem dokaže za proizvoljnu G, ali za $P = B$ = Borelova.
Izaberimo α prost, i neka je P_α parabolička podgrupa u kojoj samo α nije pokrižen.

Gledamo fibraciju $G/B \xrightarrow{\tau} G/P_\alpha$, s vlaknom $X \cong \mathbb{P}_1$.

Želimo koristiti prethodni račun, po vlaknima od π, a za to nam treba Lerayev spektralni niz, i bolji opis derivianih direktnih slika, koji koristi finu topološku strukturu fibracije:

Teorem (o redukciji na vlakna) $G/Q \xrightarrow{\tau} G/P$, $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ dom. za Q, int. za G. Tada

$$\tau_*^q \mathcal{O}_Q(\lambda) \cong \mathcal{O}\Big(\underbrace{H^q(P/Q, \mathcal{O}_Q(\lambda))}\Big)$$

P-modul $\mapsto$ homogeni svežanj na G/P

dokaz: Godement (općenitija verzija), ili Bottov originalni članak.

Korolar: Ako je $H^{p}(P/Q, \mathcal{O}_q(\lambda)) = 0$ za sve p osim možda $p = p'$, tada Lerayev spektralni niz kolabira, i imamo izomorfizam G-modula:

$$H^k(G/Q, \mathcal{O}_q(\lambda)) \cong \bigoplus_{p+q=k} E_2^{p,q} = H^{k-p'}(G/P, \mathcal{O}(H^{p'}(P/Q, \mathcal{O}_q(\lambda))))$$

(induciranje u etapama?)

$$\left[H^p(G/P, \tau_*^q \mathcal{O}_q(\lambda)) \Rightarrow H^{p+q}(G/Q, \mathcal{O}_q(\lambda)) \right]$$

$\lambda \in h^*$ integralan za G, $\mathcal{O}_b(\lambda)$ homogeni linijski svežanj.

$$G/B \xrightarrow{\pi} G/P_\alpha$$

$\underbrace{\text{Korolar i BBW za } SL(2,\mathbb{C})}$

$$\Rightarrow \quad \forall k \quad \exists p' \in \{0,1\} \text{ t.d. } H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^{k-p'}(G/P_\alpha, \mathcal{O}H^{p'}(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\lambda))) \quad ?(**)$$

$$\exists p'' \in \{0,1\} \text{ t.d. } H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)) = H^{k-p''}(G/P_\alpha, \mathcal{O}H^{p''}(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)))$$

$m := \langle \lambda, \alpha^\vee \rangle$

$$\sigma_\alpha . \lambda = \lambda - (m+1)\alpha$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda) \cong \mathcal{O}_b(\lambda) \otimes \underbrace{\mathcal{O}_b(-\alpha)}^{\otimes(m+1)} = \mathcal{O}_b(\lambda) \otimes K_{G/P_\alpha}^{\otimes(m+1)}$$

$$K_{G/P_\alpha} = \Lambda^{\dim G/P_\alpha} \Omega^1(G/P_\alpha)$$

Provjeri se direktno po definicijama:

$$\mathcal{O}_b(\lambda)\Big|_{P_\alpha/B \cong \mathbb{P}_1} = \mathcal{O}(m)$$

$$K_{G/P_\alpha}\Big|_{\mathbb{P}_1} = \mathcal{O}(-2) = K_{\mathbb{P}^1}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)\Big|_{\mathbb{P}_1} = \mathcal{O}(m) \otimes \mathcal{O}(-2m-2) = \mathcal{O}(-m) \otimes \mathcal{O}(-2)$$

$$= \mathcal{O}_b(\lambda)^* \otimes K_{\mathbb{P}^1}$$

Serreova dualnost $\Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)) &\cong H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\lambda)) \\ H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)) &\cong H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\lambda)) \end{aligned}\right\} \text{ kao } SL(2,\mathbb{C})\text{-moduli, pa nepišem dual } *$$

Ako $\langle \lambda + \rho, \alpha \rangle \geq 0$ $(\Leftrightarrow m \geq -1)$, BBW za $SL(2,\mathbb{C})$ povlači

$$\Rightarrow \underset{\substack{\parallel \\ H^0(\mathbb{P}_1,\, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda))}}{H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\lambda))} = 0$$

$\Rightarrow$ U $(**)$ imamo $p' = 0$, $p'' = 1$, i tada

$$H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^k(G/P_\alpha, \mathcal{O}H^0(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\lambda))) = H^{(k+1)-1}(G/P_\alpha, \mathcal{O}H^1(\mathbb{P}_1, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda)))$$

$$= H^{k+1}(G/B, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda))$$

Dobili smo:

Ako za α prost, $\langle \lambda+\rho, \alpha\rangle \geq 0$, $\Rightarrow H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^{k+1}(G/B, \mathcal{O}_b(\sigma_\alpha . \lambda))$

Isti argument: za α prost, $\langle \lambda+\rho, \alpha\rangle = 0 \Rightarrow$ gornje kohomologije $=0$

Pretp. λ singularan, tj. $\lambda+\rho$ u zidu korijena α.

1°) α prost $\Rightarrow H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = 0$, $\forall k \geq 0$

2°) $\exists \alpha_1$ prost t.d. $\langle \lambda+\rho, \alpha_1\rangle > 0$ (inače bi $\lambda+\rho$ bio strogo antidominantan $\Rightarrow$ regularan, zbog najduljeg elementa od W)

$\Rightarrow H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^{k+1}(G/B, \mathcal{O}_b(\sigma_{\alpha_1} . \lambda))$

Primjenimo istu priču na $\sigma_{\alpha_1} . \lambda$: ili ćemo jednom naći u zidu prostog korijena, ili će stupanj kohomologije premašiti dimenziju prostora.

U oba slučaja, $H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = \ldots = 0$, $\forall k \geq 0$.

Neka je sada λ dominantan. Dokažimo $H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = 0 \quad \forall k > 1$.

$w_0 \in W$ najdulji element, duljine $n = \ell(w_0) = |\Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})| = \dim_{\mathbb{C}}(G/B)$

$w = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_n}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ prosti, svugdje različiti.

$\langle \lambda + \rho, \alpha_n \rangle \geq 0$

$$\langle \sigma_{\alpha_{i+1}} \cdots \sigma_{\alpha_n}(\lambda+\rho), \alpha_i \rangle = \langle \lambda + \rho, \underbrace{\sigma_{\alpha_n} \cdots \sigma_{\alpha_{i+1}}(\alpha_i)}_{>0} \rangle \geq 0, \quad i = 1, \dots, n-1$$

(lema: α prost $\Rightarrow$ σ_α permutira pozitivne korijene bez α.)

$$H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^{k+1}(G/B, \mathcal{O}_b(\sigma_{\alpha_n} . \lambda)) = \dots$$

$$\dots = H^{k + \dim_{\mathbb{C}}(G/B)}(G/B, \mathcal{O}_b(w_0 . \lambda)) = 0 \quad \text{za } k \geq 1.$$

Neka je λ nesingularan, $\exists!\, w \in W$ td $w.\lambda$ dominantan

$\ell(w) = \ell$, $w = \sigma_{\alpha_1} \cdots \sigma_{\alpha_\ell}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_\ell$ prosti

Analogno kao prije (u suprotnom poretku): $\underbrace{H^k(G/B, \mathcal{O}_b(w.\lambda))}_{\substack{\text{po prethodnom slučaju} \\ \text{može biti} \neq 0 \text{ jedino za } k=0}} = \dots = H^{k+\ell}(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda))$, Dobili smo $H^k(G/B, O_b(\lambda)) = \begin{cases} 0 & : k \neq l(w) \\ \Gamma(G/B, O_b(w.\lambda)) & : k = l(w) \end{cases}$

[Bott]

Treba još dokazati: za λ dominantan

$$\Gamma(G/B, O_b(\lambda)) = E(\lambda) \qquad \text{[Borel-Weil]}$$

(da smo uzeli B^-, ...)

To se najčešće dokaže analitički, uz pomoć Peter-Weyl teorema

Mi ćemo lako dokazati koristeći početak BGG-rezolucije (kasnije ćemo to vidjeti općenitije.

Teorem (BGG rezolucija)
Postoji egzaktan niz snopova na G/B, s G-ekvivarijantnim diferencijalima.

$$0 \to \underbrace{E(\lambda)}_{\substack{\text{lokalno konstantan snop} \\ \text{nad svakim otvorenim} \\ \text{povezanim skupom prerezi} \\ \text{su } E(\lambda).}} \to O_b(\lambda) \to \bigoplus_{\alpha \in S} O_b(\sigma_\alpha . \lambda) \qquad \Big/ \; \underset{\text{lijevo egzaktan}}{\Gamma(G/B, -)}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \to E(\lambda) \to \Gamma(G/B, O_b(\lambda)) \to \bigoplus_{\alpha \in S} \underbrace{\Gamma(G/B, O_b(\underbrace{\sigma_\alpha . \lambda}_{\text{nije dominantno}}))}_{\overset{||}{0}}$$

$$\Rightarrow \Gamma(G/B, O_b(\lambda)) \simeq E(\lambda)$$

BBW je sada dokazan za slučaj Borelove podgrupe od G.
Neka je $P \subseteq G$ parabolička, gledamo fibraciju

$$G/B \xrightarrow{\pi} G/P \,, \quad \text{s vlaknom } P/B \cong L_S/L_S \cap B$$

Borelova

λ dominantan za P, integralan za G.

$$\text{Korolar} \Rightarrow H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda)) = H^{k-p'}(G/P, \mathcal{G}H^{p'}(L_S/L_S\cap B, \mathcal{O}_b(\lambda)))$$

$$= H^{k-p'}(G/P, \mathcal{G}H^{p'}(L_S/L_S\cap B, \mathcal{O}_{l_S \cap b}(\lambda)))$$

$l_S \cap b$ dominantno

(BBW za Borelovu $\Rightarrow p'=0$)

$$= H^k(G/P, \mathcal{O}_P(\lambda))$$

Već smo dokazali teorem za $H^k(G/B, \mathcal{O}_b(\lambda))$, pa BBW vrijedi i za $H^k(G/P, \mathcal{O}_P(\lambda))$.

QED.

Primjer $\quad G/P = \times\!-\!\bullet\!-\!\bullet \cdots - \bullet = \mathbb{P}_n$

$k \in \mathbb{Z}$, $\quad \mathcal{O}_P(\underbrace{\overset{k}{\times}-\overset{0}{\bullet}-\overset{0}{\bullet}\cdots-\overset{0}{\bullet}}_{\lambda}) = \mathcal{O}(k)$ (Serre twisting sheaf)

Za $k \geq 0$, λ dominantan

$$\text{BBW} \Rightarrow H^0(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}(k)) = \Gamma(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}(k)) = \overset{k}{\bullet}-\overset{0}{\bullet}-\overset{0}{\bullet}\cdots-\overset{0}{\bullet}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{homogeni polinomi} \\ \text{stupnja } k \text{ u} \\ n+1 \text{ varijabli nad } \mathbb{C} \end{pmatrix}^*$$

$$= \odot^k (\mathbb{C}^{n+1})^*$$

ostale kohomologije $= 0$.

$k < 0$ $\quad$ Prije smo izračunali

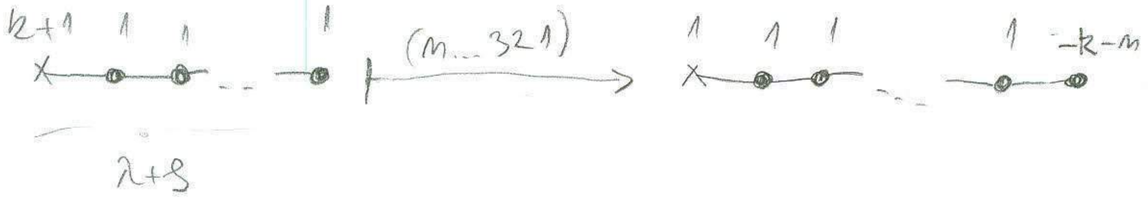
$$(W^{\mathfrak{p}})^{-1} = \{id, (1), (21), \dots, (n \dots 321)\}$$

$$\underbrace{\overset{k+1}{\times}-\overset{1}{\bullet}-\overset{1}{\bullet}\cdots-\overset{1}{\bullet}}_{\lambda+\rho} \xmapsto{(1)} \overset{-k-1}{\times}-\overset{k+2}{\bullet}-\overset{1}{\bullet}\cdots-\overset{1}{\bullet} \xmapsto{(2)} \overset{1}{\times}-\overset{-k-2}{\bullet}-\overset{k+3}{\bullet}\cdots-\overset{1}{\bullet}$$

$\mapsto$ itd, ako je $\underline{-n \leq k < 0}$, dobit ćemo nulu prije kraja $\Rightarrow$ $\lambda + \rho$ je u zidu $\Rightarrow$ singularna

$$\text{BBW} \Rightarrow H^r(\mathbb{P}_n, \mathcal{O}(k)) = 0 \quad \forall r.$$

Ako je $k < -m$,



$\underbrace{(m\ldots,321)}_{\text{duljine } m}\circ(\lambda) =$  dominantan

BBW $\Rightarrow H^m(\mathbb{P}_m, \mathcal{O}(k)) =$ 

$= \left(\begin{array}{l}\text{homogeni polinomi} \\ \text{stupnja } -k-m-1 \\ \text{u } (m+1) \text{ varijabli nad } \mathbb{C}\end{array}\right)$

$= \odot^{-k-m-1}(\mathbb{C}^{m+1})$

(ostale kohomologije $=0$)

Računanje direktnih slika pomoću BBW-a.

$Q \subseteq P$ standardne parabolične, $G/Q \xrightarrow{\tau} G/P$ fibracija.

(s vlaknom $P/Q \cong (L_P)_s / (L_P)_s \cap Q$)

$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ integralan za G
dominantan za Q

$\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}(\lambda)$ homogeni svežanj/snop nad G/Q.

$$\tau_*^i \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}(\lambda) \underset{\substack{\text{redukcija}\\ \text{na vlakna}}}{\overset{\text{tm o}}{=}} \bigcirc\, H^i\left((L_P)_s / (L_P)_s \cap Q, \mathcal{O}_{(l_P)_s \cap \mathfrak{q}}(\lambda) \right) \underset{\text{po vlaknima}}{\overset{\text{BBW}}{=}} \dots$$

Je li λ $(l_P)_s$-regingularan?
$w.\lambda$ $(l_P)_s$-dominantan za $w \in W_P$?

$$W_P^{\mathfrak{q}} = \left(\text{Hasseov dijagram od } (l_P)_s \cap \mathfrak{q} \subseteq (l_P)_s \right) \subseteq W_P \subseteq W_{\mathfrak{g}}$$

Gledamo orbitu $(W_P^{\mathfrak{q}})^{-1} . \lambda$

① Ako u toj orbiti nema $\mathfrak{p}$-dominantnih elemenata, (tj. λ je $\mathfrak{p}$-singularan), tada

$$\tau_*^i (\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}(\lambda)) = 0, \quad \forall i.$$

② U suprotnom, $\exists!$ $\mathfrak{p}$-dominantan element $w.\lambda$, $w \in (W_P^{\mathfrak{q}})^{-1}$,

i tada:

$$\tau_*^i (\mathcal{O}_{\mathfrak{q}}(\lambda)) = \begin{cases} \mathcal{O}_P(w^{-1}.\lambda) & : i = l(w) \\ 0 & : i \neq l(w) \end{cases}$$

(ovu stranu mogu preskočiti jer nema ništa novo)

Dakle:

- Djelujemo (običnim djelovanjem) s W_P (refleksije oko prostih korijena neprekriženih u $G/P_1 = l_P$ dio) na težinu $\mathfrak{g}^\alpha$ (ima 1 iznad prekriženih korijena u vlaknu $(l_P)_s / (l_P)_s \cap \alpha$, na ostalima 0)

$$\text{orbita} \xleftrightarrow{1-1} (W_P^\alpha)^{-1}$$

- S dobivenim $(W_P^\alpha)^{-1}$ djelujemo afino na λ (tj. djelujemo na $\lambda+\rho$, (tj. +1 na svaki vrh), pa na kraju -1 od svakog vrha)

Pojavit će se 0 iznad l_P dijela prije oduzimanja -1

ili

pojave se iste težine na l_P-dijelu iznad različitih mjesta u Hasseovom dijagramu $(W_P^\alpha)^{-1}$

$$\Downarrow$$

$$\tau_*^i (\mathcal{O}_\alpha(\lambda)) = 0 \quad \forall i$$

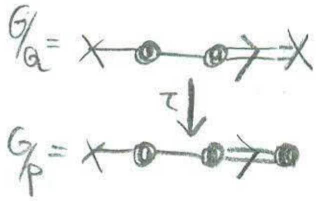
Na nekom mjestu u dijagramu dobijemo (nakon oduzimanja -1) težinu ν koja ima nenegativne brojeve iznad l_P-dijela.

l = broj koraka do početka

$$\Downarrow$$

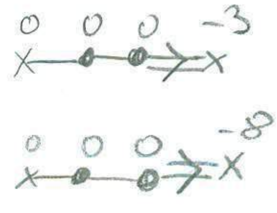
$$\tau_*^l (\mathcal{O}_\alpha(\lambda)) = \mathcal{O}_P(\nu)$$

$$\tau_*^i (\mathcal{O}_\alpha(\lambda)) = 0 \quad \text{za } i \neq l,$$

<u>Primjer</u> $G/Q =$  = projektivizirani svežanj čistih spinora na $\mathbb{C}S^5$

$G/P = \mathbb{C}S^9$

Izračunajmo direktne slike snopova

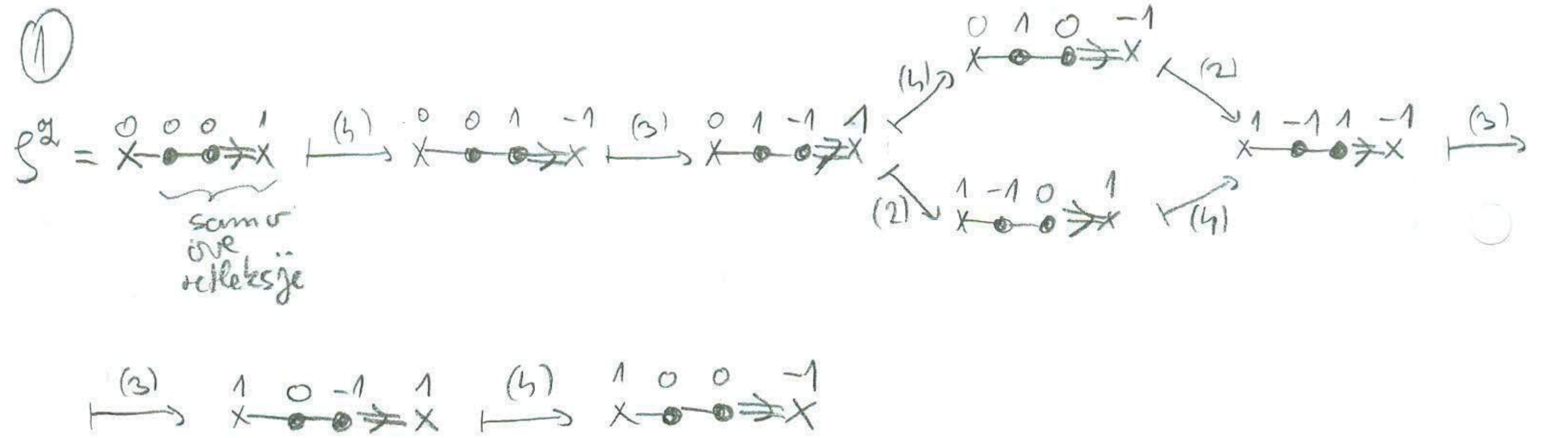


a) $= \lambda_1$

b) $= \lambda_2$

---

(1)

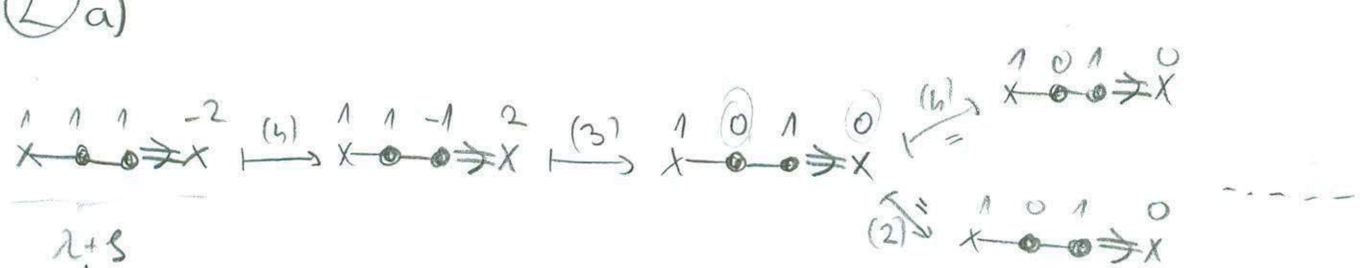


$\rho^{\mathfrak{q}} =$

samo ove refleksije

$$\left(W_p^{\mathfrak{q}}\right)^{-1} = \left\{ (id) \longrightarrow (4) \longrightarrow (34) \begin{array}{c} \nearrow (434) \searrow \\ \searrow (234) \nearrow \end{array} \begin{array}{c} (4234) \\ \parallel \\ (2434) \end{array} \longrightarrow (32434) \longrightarrow (432434) \right\}$$

(2) a)



$\lambda_1 + \rho$

$\Rightarrow \lambda_1$ je p-singularan

$\Rightarrow \tau_*^i\Big($  $\Big) = 0 \quad \forall i.$

② b)

$$\underbrace{(1\ 1\ 1\ -7)}_{\lambda_2+\rho} \overset{(4)}{\longmapsto} (1\ 1\ -6\ 7) \overset{(3)}{\longmapsto} (1\ -5\ 6\ -5)$$

$$(1\ -5\ 6\ -5) \overset{(4)}{\longmapsto} (1\ -5\ 1\ 5) \overset{(2)}{\longmapsto} (-4\ 5\ -4\ 5)$$

$$(1\ -5\ 6\ -5) \overset{(2)}{\longmapsto} (-4\ 5\ 1\ -5) \overset{(4)}{\longmapsto} (-4\ 5\ -4\ 5)$$

$$(-4\ 5\ -4\ 5) \overset{(3)}{\longmapsto} (-4\ 1\ 4\ -3) \overset{(4)}{\longmapsto} (-4\ \underbrace{1\ 1\ 3}_{\text{svi su strogo pozitivni}})$$

$$(432434).(0\ 0\ 0\ -8) = (-5\ 0\ 0\ 2) \text{ je p-dominantan}$$

$$\Rightarrow \quad \tau_*^6(0\ 0\ 0\ -8) = (-5\ 0\ 0\ 2) \quad \text{(ostale direktne slike su 0)}$$

31.3.2015.

Bernstein-Gelfand-Gelfand rezolucija

Na kompleksnoj n-dim. mnogostrukosti imamo holomorfnu de Rham-ovu rezoluciju lokalno konstantnog snopa $\mathbb{C}$:

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \Omega^2 \to \dots \to \Omega^n \to 0$$

(holomorfne p-forme)

vektorski svežnjevi, tj. lokalno slobodni snopovi.

Najbolje što se može općenito.

Za gen. mnog. zastava može bolje:

Nađemo distribuciju $D \subseteq T$ (tang. svežanj) t.d.

$$\mathrm{span}([\mathcal{O}D, \mathcal{O}D], \mathcal{O}D) = \mathcal{O}T$$

$\Omega^1 \longrightarrow \Delta^1 = D^*$ (projekcija, tj. restrikcija)

$$\Downarrow$$

$$f \in \mathbb{C} \iff (\mathcal{O}D)(f) = 0,$$

$$\Delta^0 = \Omega^0 = \mathcal{O}_X \xrightarrow{d} \Omega^1 \to \Delta^1$$

$0 \to \mathbb{C} \hookrightarrow \Delta^0 \longrightarrow \Delta^1$ je egzaktan niz zbog

Inače nema prirodnog izbora za D, ali za gen. mnog. zastava G/P ima: dovoljno je izabrati odgovarajući potprostor tang. prostora u P, i zatim ga prenijeti na ostatak mnogostrukosti uz pomoć djelovanja grupe G.

<u>Prototip</u> $\quad \times\!-\!\times = SL(3,\mathbb{C})/B \quad , \quad \mathcal{O}_X = \overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}$

U točki B: $\quad T = \mathfrak{sl}(3,\mathbb{C})/\mathfrak{b} \cong \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ * & * & 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$D := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ * & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq T \quad \text{(je } B\text{-podmodul)}$$

Lako se provjeri da je kao B-modul $\quad D = \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times} \oplus \overset{-1}{\times}\!-\!\overset{2}{\times} \quad , \quad \Delta^1 = D^*$

Dobili smo egzaktan niz:

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} \longrightarrow \begin{matrix} \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\times} \\ \oplus \\ \overset{1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times} \end{matrix}$$

Može se i dalje nastaviti ad hoc metodama. Ima kompliciranih stvari i računa (Hodgeov $*$-izomorfizam)

Dobije se BGG rezolucija, s G-invarijantnim morfizmima

$$\begin{tikzcd} & \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\times} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} \arrow[dr] & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} \arrow[u] \arrow[d] \quad \oplus \qquad \oplus & \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times} \arrow[r] & 0 \\ & \overset{1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times} \arrow[r] \arrow[ur] & \overset{0}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

(isti oblik kao Weylova grupa s Bruhatovim uređajem — nije slučajno!)

Dimenzije BGG rezolucije su: 1 2 2 1.

a za de Rhamovu : 1 3 3 1 $\binom{3}{k}$

Cijena smanjenja dimenzija:

diferencijal u de Rhamovoj rezoluciji je reda 1,

dok u BGG rezoluciji su diferencijalni operatori višeg reda.

BGG rezoluciju bilo koje ired. reprezentacije $\overset{p}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{q}{\bullet}$ od G dobijemo od BGG rezolucije za $\mathbb{C}$ pomoću Jantzen-Zuckermanovih funktora translacije.

otprilike: Tenzoriramo prethodnu rezoluciju s trivijalnim svežnjem $X \times \overset{p}{\bullet}\!\!-\!\!\overset{q}{\bullet}$ i uzmemo komponentu s odgovarajućim infinitezimalnim karakterom.

BGG za slučaj G/B (Differential operators on the base affine space, and a study of $\mathfrak{g}$-modules)

Teorem λ dominantna integralna za $\mathfrak{g}$.
Postoji egzaktan niz:

$$0 \to \underbrace{E(\lambda)}_{\text{lok. konstantan snop}} \longrightarrow \Delta^0(\lambda)$$

$$\Delta^p(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{g}} \\ \ell(w) = p}} \mathcal{O}_b(w.\lambda)$$

Diferencijali $\Delta^p(\lambda) \to \Delta^{p+1}(\lambda)$ su G-invarijantni holomorfni diferencijalni operatori, a dobiju se kao direktna suma svih

$\mathcal{O}_b(v.\lambda) \longrightarrow \mathcal{O}_b(w.\lambda)$ kad je $v \to w$, tj. $w = \sigma_\alpha v$ (α ne nužno prost).

Štoviše, pokazali su (u nekom ranijem članku) da postoji G-invarijantan holomorfni diferencijalni operator

$$\mathcal{O}_b(u.\lambda) \longrightarrow \mathcal{O}_b(v.\lambda)$$

ako i samo ako $u \leq v$, tj. postoji konačan niz $u \to \ldots \to v$ u W, i u tom slučaju je taj operator jedinstven do na skalar (i injektivan), tj.

$$\mathrm{Hom}_G(\mathcal{O}_b(u.\lambda), \mathcal{O}_b(v.\lambda)) = \begin{cases} \mathbb{C} & : u \leq v \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

(Oni su radili u dualnoj kategoriji Vermaovih modula)

BGG za slučaj G/p

Teorem λ dominantna integralna za $\mathfrak{g}$.

Postoji egzaktan G-invarijantan niz:

ovo treba biti p-dominantno, zato W^p

$$0 \to \mathcal{E}(\lambda) \longrightarrow \Delta^\bullet(\lambda), \qquad \Delta^p(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W^p \\ \ell(w) = p}} \mathcal{O}_p(w\cdot\lambda)$$

(lok. kost. snop)

(više nisu direktne sume linijskih svežnjeva kao kod Borelove)

Morfizmi su direktne sume sljedećih:

za $v \to w$ u $W^p \subseteq W_{\mathfrak{g}}$

$$\exists\ \mathcal{O}_b(v\cdot\lambda) \xrightarrow{f \neq 0} \mathcal{O}_b(w\cdot\lambda) \quad /\tau_*^0 \qquad G/B \xrightarrow{\tau} G/p$$

p-dominantni

$$\tau_*\mathcal{O}_b(v\cdot\lambda) = \mathcal{O}_p(v\cdot\lambda) \xrightarrow{\tau_* f} \tau_*\mathcal{O}_b(w\cdot\lambda) = \mathcal{O}_p(w\cdot\lambda)$$

može se desiti i $\tau_* f = 0$.

Dokaz: može se izvesti iz Borelovog slučaja, koristeći hiper-derivirane funktore direktne slike fibracije, i za računanje kohomologija koristiti ćelijsku strukturu od G/p.

2. dokaz: Lepowsky, algebarski, u dualnoj priči s generaliziranim Vermaovim modulima.

• Inv. dif. operator $O_p(\lambda) \to O_p(\mu)$ koji je direktna slika inv. dif. op. operatora $O_b(\lambda) \to O_b(\lambda)$ zovemo <u>standardnim</u>.

(može biti i nula, u suprotnom je jedinstven do na skalar)

• Mogu se javiti invarijantni dif. op. $O_p(\lambda) \to O_p(\mu)$ koji su <u>nestandardni</u>.

- Klasifikacija im općenito nije poznata. Postoje nužni uvjeti za njihovu egzistenciju.

- Penroseova transformacija često daje nestandardne operatore.

- Eastwood-Rice: Pomoću Penroseove transformacije pronašli sve $SL(4,\mathbb{C})$-invarijantne operatore:

$$\overset{p}{\bullet}\!-\!\overset{q}{\times}\!-\!\overset{r}{\bullet} \xrightarrow{\exists!\ \text{nestandardni}} \overset{r}{\bullet}\!-\!\overset{-p-q-r-4}{\times}\!-\!\overset{p}{\bullet} \qquad p, r \geq 0$$

$$\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\ \square\ } \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \quad = \quad \text{valni operator ili Laplacijan}$$

Njega ćemo na primjeru dobiti kasnije.

Relativna BGG rezolucija

$Q \subseteq R \subseteq G$

$$\begin{tikzcd}
\text{(pullback)}\ \eta^*E \subseteq G/Q \times E \arrow[r] \arrow[d] & E \ \left(\text{holomorfni vektorski svežanj}\right) \arrow[d] \\
G/Q \arrow[r, "\eta"] & G/R
\end{tikzcd}$$

$\eta^{-1}\mathcal{O}(E)$ = prerezi svežnja η^*E koji su konstantni na vlaknima od η

usput:

$$\eta^*\mathcal{O}(E) = \mathcal{O}(\eta^*E)$$
$$\|$$
$$\mathcal{O}_{G/Q} \otimes_{\eta^{-1}\mathcal{O}_{G/R}} \mathcal{O}(E)$$

<u>Teorem</u> λ dominantan za $\mathfrak{r}$, integralan za $\mathfrak{g}$.

Postoji egzaktan G-invarijantan niz

$$0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}_{\mathfrak{r}}(\lambda) \to \Delta^\bullet_\eta(\lambda), \qquad \Delta^p_\eta(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{r}}^{\mathfrak{q}} \\ l(w)=p}} \mathcal{O}_{\mathfrak{q}}(w \cdot \lambda)$$

ovdje isto djeluje G

Za $R=G$ imamo $G/Q \xrightarrow{\eta} \{*\}$

homogeni vekt. svežnji su reprezentacije od G $\xmapsto{\eta^{-1}}$ lok. konst. snop.

$\Rightarrow$ prethodni teorem

Primjer BGG za $SL(3,\mathbb{C})/B = \times\!-\!\times$

Prije smo izračunali:
$$
\begin{tikzcd}
 & (1) \arrow[r] \arrow[dr] & (21) \arrow[dr] & \\
W_{\mathfrak{g}} = \{ id \arrow[ur] \arrow[dr] & & & (121) \} \\
 & (2) \arrow[r] \arrow[ur] & (12) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda = \overset{p}{\times}\!-\!\overset{q}{\times}$, $p, q \geq 0$

$$
\begin{tikzcd}
 & \overset{-p-1}{\times}\!-\!\overset{p+q+2}{\times} \arrow[r, mapsto] & \overset{q+1}{\times}\!-\!\overset{-p-q-2}{\times} \arrow[dr, mapsto] & \\
\lambda+\rho = \overset{p+1}{\times}\!-\!\overset{q+1}{\times} \arrow[ur, mapsto] \arrow[dr, mapsto] & & & \overset{-q-1}{\times}\!-\!\overset{-p-1}{\times} \\
 & \overset{p+q+2}{\times}\!-\!\overset{-q-1}{\times} \arrow[r, mapsto] & \overset{-p-q-2}{\times}\!-\!\overset{p+1}{\times} \arrow[ur, mapsto] &
\end{tikzcd}
\quad / -\rho
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & \overset{-p-2}{\times}\!-\!\overset{p+q+1}{\times} \arrow[r] \arrow[dr] & \overset{q}{\times}\!-\!\overset{-p-q-3}{\times} \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & E\left(\overset{p}{\bullet}\!-\!\overset{q}{\bullet}\right) \arrow[r] & \overset{p}{\times}\!-\!\overset{q}{\times} \arrow[u] \arrow[d] & & \overset{-q-2}{\times}\!-\!\overset{-p-2}{\times} \arrow[r] & 0 \\
 & & \overset{p+q+1}{\times}\!-\!\overset{-q-2}{\times} \arrow[r] \arrow[ur] & \overset{-p-q-3}{\times}\!-\!\overset{p}{\times} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Primjer relativna BGG za
$$
\left(
\begin{tikzcd}
G/Q = \times\!-\!\times\!-\!\bullet \arrow[d, "\eta"] \\
G/R = \times\!-\!\bullet\!-\!\bullet = \mathbb{P}_3
\end{tikzcd}
\right)
$$
snopa $\eta^{-1}\mathcal{O}(k) = \eta^{-1}\left(\overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right)$

(1) W_r^{q} :

$$\underbrace{\overset{0}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}}\!-\!\overset{0}{\bullet} \xmapsto{(2)} \overset{1}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \xmapsto{(3)} \overset{1}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times}$$

$$W_r^{q} = \{ id \to (2) \to (23) \}$$

$$\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \xmapsto{(2)} \overset{k+2}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{2}{\bullet}$$

$$\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \xmapsto{(3)} \overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{2}{\times}\!-\!\overset{-1}{\bullet} \xmapsto{(2)} \overset{k+3}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$0 \longrightarrow \eta^{-1}\mathcal{O}(k) \longrightarrow \overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{k+2}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow 0$$

Struktura od G/P

G jednostavno povezana, povezana, kompleksna, poluprosta, $P = L + U \subseteq G$ paraboličke

Projektivna realizacija

$$\langle \varsigma^P, \alpha^\vee \rangle = \begin{cases} 0 & : \alpha \in S_P \\ 1 & : \alpha \in S \setminus S_P \end{cases}$$

Neka je $F(\varsigma^P)$ reprezentacija od G najveće težine ς^P
$f \in F(\varsigma^P)$ vektor najveće težine.

Za $\alpha > 0$, $\mathfrak{g}_\alpha . f = 0 \Rightarrow N = \exp(\mathfrak{n})$ fiksira f

$\mathfrak{h}$ djeluje skalarima na $f \Rightarrow H$ djeluje skalarima na f

Za $\alpha \in S_P$ ($\Leftrightarrow \mathfrak{g}_{\pm\alpha} \subseteq \mathfrak{l}$), vidimo $\mathfrak{g}_{-\alpha} . f = 0$ (po uskom na $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$)
$\Rightarrow L$ fiksira f

G djeluje na projektivnom prostoru $\mathbb{P}(F(\varsigma^P)) \cong \mathbb{P}_k$
i $P \subseteq \operatorname{Stab}([f])$.

Vrijedi i obratna inkluzija!

Za $y \in \mathfrak{g}_\alpha \subseteq \mathfrak{u}_-$ ($\langle \varsigma^P, \alpha^\vee \rangle < 0$), tvrdim $y . f \neq 0$

Uzmemo $x \in \mathfrak{g}_{-\alpha} \subseteq \mathfrak{u}$.

$$xy . f = \underbrace{[x, y]}_{\in \mathfrak{h}} . f + y \underbrace{x . f}_{= 0} = \underbrace{\langle x, y \rangle}_{\neq 0} \underbrace{\langle \varsigma^P, \alpha^\vee \rangle}_{\neq 0} f \neq 0.$$

$\Rightarrow \quad P = \mathrm{Stab}[\lambda]$

$$\Rightarrow \quad G/P \overset{\text{difeo}}{\cong} G.[\lambda] \subseteq \mathbb{P}(F(\mathfrak{g}^P))$$

kompaktan $\Rightarrow$ zatvoren $\Rightarrow$ kompleksna podmnogostrukost

$\Downarrow$ Chowov teorem

G/P projektivna mnogostrukost.
(nesingularna)

Ćelijska struktura

[Prototip: $\mathbb{P}_n = \mathbb{C}^n \cup \underset{(\cup \infty)}{\mathbb{P}_{n-1}} = \ldots = \mathbb{C}^n \cup \mathbb{C}^{n-1} \cup \ldots \cup \mathbb{C}^0$]

Bruhatova dekompozicija:

$$G/P = \bigsqcup_{w \in W^P} B(wP) \quad , \quad W^P \subseteq W \cong N_G(h)/H$$

λ^w je vektor težine $w^{-1}\mathfrak{g}^P$

(B-orbite)

$\downarrow$ kad se gledaju u $\mathbb{P}(F(\mathfrak{g}^P))$

$$X_w := N.[\lambda^w] =: \text{Schubertova ćelija}$$

$$G/P = \bigsqcup_{w \in W^P} X_w$$

$\overline{X_w}$:= Schubertov varijetet
(Zariski-zatvarač ili običan, podudaraju se)
(projektivni podvarijetet od G/P)
(može biti singularan)

Vrijedi:

- $X_w \overset{\text{difeo}}{\cong} \mathbb{C}^{\ell(w)}$
- x_w je otvoren u $\overline{X_w}$
- $X_{w'} \subseteq \overline{X_w} \iff w' \leq w$ (Bruhatov uređaj u W_g)
- $\partial \overline{X_w} = \overline{X_w} \setminus X_w = \bigsqcup_{\substack{w' \in W^P \\ w' < w}} X_{w'}$
- $\overline{X_w} = \bigsqcup_{\substack{w' \in W \\ w' \leq w}} X_{w'}$
- Postoji gusta otvorena Schubertova ćelija koja odgovara najvećem elementu u W^P. Znat ćemo je <u>afina velika ćelija</u> (koju ćemo koristiti za Penroseovu tnatoroiju)

Primjer: Prije smo izračunali za $\mathbb{P}_n$
$$W^P = \{ id \to (1) \to (21) \to \dots \to (n..21) \}.$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}^n = \mathbb{C}^0 \cup \mathbb{C}^1 \cup \dots \cup \mathbb{C}^n$$

Iz rastava na Schubertove ćelije lako se dobije integralna homologija od G/P:

$$H_k(G/P, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & ; \ k \text{ neparan} \\ \mathbb{Z}^{\#\text{elemenata iz } W^P \text{ duljine } k/2} & ; \ k \text{ paran} \end{cases}$$

$H_*(G/P, \mathbb{Z}) = \bigoplus_k$ = slobodan $\mathbb{Z}$-modul generiran s W^P (ili Schubertovim ćelijama)

Uz malo više truda, može se vidjeti da W^P i W_g potpuno određuju i integralni kohomološki prsten (cup produkt kojeg homologija nema).
Potrebno je koristiti karakteristične klase (Chernova, Pontrjaginova).

Osim B-orbita, proučavaju se i orbite kompaktne forme G_0, tzv. ko-adjungirane orbite, pomoću kojih se G/P može proučavati kao realna simplektička mnogostrukost.
(ali izgleda da se to ne koristi dalje u knjizi)

Spominju se i orbite nekompaktne realne forme G_0 na G/P [Wolf].
Dosta komplicirano, vodi na tzv. geometrijsku kvantizaciju, naposljetku na konstrukciju diskretnih serija preko L^2-kohomologije. [Schmid]

Postoje indikacije da se diskretne serije mogu konstruirati preko „dvostruke" Penroseove transformacije koja se zove Twistor-transformacija, (bez komplicirane L^2-kohomologije) i to je napravljeno za $SL(2,\mathbb{R}) \cong SU(1,1)$ (cijelo poglavlje), i autor kaže da bi se trebalo moći poopćiti, ali nije napravljeno.

9. 4. 2015. [Napomena za $\eta^{-1}\mathcal{O}_E$]

Principi Penroseove transformacije

G kompleksna jednostavno povezana, povezana, poluprosta Liejeva grupa
$R, P, Q = R \cap P \subseteq G$ paraboličke podgrupe.

$$\begin{tikzcd} & G/Q \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ G/R & & G/P \\ & & X \arrow[u, phantom, "\cup" rotate=90] \end{tikzcd}$$

prigodan otvoren podskup, najčešće otvorenu veliku ćeliju, ili uniju otvorenih orbita realne forme od G na G/P.

$$\begin{tikzcd} & Y \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ Z & & X \end{tikzcd}$$

$Y = \tau^{-1}(X)$

$Z = \eta(Y)$

X, Y, Z kompleksne mnogostrukosti, η, τ holomorfne surjekcije maksimalnog ranga.

$Y \xhookrightarrow{\eta\times\tau} Z \times X$

Vlakna od τ kompaktna

Neka je E holomorfni vektorski svežanj na G/R (u praksi uvijek homogen), $\mathcal{O}_E$ snop holomorfnih prereza od E.

Ideja: uzmemo kohomološku klasu $[\omega] \in H^p(Z, \mathcal{O}_E)$, ω p-forma na Z s vrijednostima u E.

1) pull-back: povučemo ω na Y, $\eta^* \omega$ konstantna na vlaknima od η (konstantnost po vlaknima se može izraziti s diferencijalnim jednadžbama)

2) push-down: $\eta^* \omega$ integriramo po vlaknima od τ: dobijemo funkciju: $X \longrightarrow \tilde{E}$

$$H^p(Z, \mathcal{O}_E) \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{prerezi svežnja nad } X \\ \text{koji zadovoljavaju} \\ \text{određene diferencijalne} \\ \text{jednadžbe.} \end{array} \right.$$

$\boxed{\text{1) pull-back faza}}$

$$
\begin{array}{ccc}
\eta^* E & \longrightarrow & E \\
\downarrow & & \downarrow \pi \\
Y & \xrightarrow{\eta} & Z
\end{array}
\qquad
\eta^{-1}\mathcal{O}_E = \left\{ \begin{array}{l} \text{prerezi od } \eta^* \\ \text{(tj. } s : U \subseteq Y \to E \text{ td} \\ \quad \pi s = \eta \text{)} \\ \text{koji su (lokalno)}^* \text{ konstantni} \\ \text{na vlaknima od } \eta . \end{array} \right.
$$

(* naša vlakna će biti povezana pa lok. konst. ⇒ konst.)

Iz tog opisa slijedi da postoji prirodno preslikavanje:

Ako su vlakna povezana očito je izomorfizam.

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_E) \xrightarrow{(-\circ\eta)} \Gamma(Y, \eta^{-1}\mathcal{O}_E)$$

__Teorem__ Ako su vlakna od $\eta : Y \to Z$ kontraktibilna pomoću glatke homotopije koja čuva η tada

$$H^r(Z, \mathcal{O}_E) \cong H^r(Y, \eta^{-1}\mathcal{O}_E), \qquad \forall r \geq 0$$

<u>grupa Skica dokaza</u>

Uzmemo Dolbeaultovu rezoluciju za računanje kohomologije

$$0 \to \mathcal{O}_E \to \mathcal{E}^{0,0}_E \xrightarrow{\bar\partial} \mathcal{E}^{0,1}_E \to \dots \qquad \mathcal{E}^{p,q}_E = \text{snop glatkih formi tipa } (p,q) \text{ s vrijednostima u } E.$$

$0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}_E \to \eta^{-1}\mathcal{E}^{0,\bullet}_E$ egzaktan i dalje (jer je η^{-1} egzaktan funktor)

$$H^r(Z, \mathcal{O}_E) = H^r(\Gamma(Z, \mathcal{E}_E^{0,\bullet})) \underset{\sim}{\overset{\eta \text{ ima povezana vlakna}}{=\!=}}$$

$$\cong H^r(\Gamma(Y, \eta^{-1}\mathcal{E}_E^{0,\bullet})) = H^r(Y, \eta^{-1}\mathcal{O}_E)$$

pod uvjetom da je $0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}_E \to \eta^{-1}\mathcal{E}_E^{0,\bullet}$ aciklička rezolucija,

tj. $H^r(Y, \eta^{-1}\mathcal{E}_E^{0,\bullet}) = 0 \quad \forall r \geq 1.$

Pokaže se da je tako, prelaskom na vlakna od η oponašajući dokaz homotopske invarijantnosti za običnu de-Rhamovu kohomologiju.

Tehnički detalji: Članci od Buchdahl, Michael Singer.

Najveći tehnički problem: vlakna od η se moraju, i često nisu kompaktna.

$\boxed{2)\ \text{push-down faza}}$

$$\begin{tikzcd} Y \subseteq G/Q \arrow[dr, "\tau"] & \\ & X \subseteq G/P \end{tikzcd}$$

--- $\tau^{-1}\mathcal{O}_E$, uzmimo mu rezoluciju s lokalno-slobodnim snopovima:

$$0 \to \tau^{-1}\mathcal{O}_E \to \Delta^\bullet_\tau$$

(npr. relativnu BGG rezoluciju, ali može i druge, npr. relativnu de-Rhamovu rezoluciju)

Sad ćemo izvesti spektralni niz hiperkohomologije za ovaj slučaj. Uzmemo tzv. Cartan-Eilenbergovu rezoluciju:

- stupci injektivne rezolucije
- Nakon uzimanja horizontalnih kohomologija, stupci su i dalje injektivne rezolucije.

$$\begin{tikzcd}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \\
0 \arrow[r] & I^1 \arrow[r] \arrow[u] & I^{0,1} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,1} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r] \arrow[u] & I^{0,0} \arrow[r] \arrow[u] & I^{1,0} \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
0 \arrow[r] & \tau^{-1}\mathcal{O}_E \arrow[r] \arrow[u] & \Delta_\tau \arrow[r] \arrow[u] & \Delta^1_\tau \arrow[r] \arrow[u] & \dots \\
 & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] &
\end{tikzcd}$$

$/\Gamma$

Na seminaru iz Kohomološke indukcije vidjeli smo da bikompleks $B^{\bullet\bullet}$ u prvom kvadrantu daje dva spektralna niza:

$$
\left.\begin{aligned}
{}^{I}E_2^{p,q} &= H_h^p(H_v^q(B^{\bullet\bullet}))\\
{}^{II}E_2^{p,q} &= H_N^p(H_h^q(B^{\bullet\bullet}))
\end{aligned}\right\} \Rightarrow H^{p+q}(\mathrm{tot}\, B^{\bullet\bullet})
$$

$$
(\mathrm{tot}\, B^{\bullet\bullet})_r = \bigoplus_{p+q=r} B^{p,q}
$$

U našem slučaju, zbog izbora Cartan Eilenberg rezolucije ispada:

$$
{}^{I}E_1^{p,q} = H^q(Y, \Delta_\eta^p)
$$

$$
{}^{II}E_2^{p,q} = H^q(Y, \underbrace{H^p(\Delta_\eta^\bullet)}_{\overset{\shortparallel}{0} \text{ za } p>1}) = \left\{\begin{array}{ll} 0 & : p>1 \\ H^q(Y, \eta^{-1}O_E) & : p=0 \end{array}\right\} = E_\infty \quad \text{kolabira}
$$

Dakle, postoji spektralni niz:

$$
\boxed{E_1^{p,q} = H^q(Y, \Delta_\eta^p) \Longrightarrow H^{p+q}(Y, \eta^{-1}O_E)}
$$

ovo ćemo još razriješiti preko Lerayevog spektralnog niza.

ovo imamo u pullback fazi.

$Y \xrightarrow{\tau} X$

Leray: $E_2^{p,q} = H^p(X, \tau_*^q \Delta_\eta^k) \Longrightarrow H^{p+q}(Y, \Delta_\eta^k)$ (k fiksan)

ovdje se možemo opet
koristiti BBW da dobijemo
kolabiranje (jer ovo nije globalna
kohomologija na G/Q), treba
nešto drugo:

<u>Cartanov teorem B:</u> Neka je $X = \mathbb{C}^n$ ili općenitije Steinova** podmnogostrukost, F koherentan* snop na X.
Tada je $H^p(X, F) = 0$ za sve $p \geq 1$. (vrijedi i obrat)

* jedna od karakterizacija koherentnosti:

F je konačnog tipa nad $\mathcal{O}_X$, tj. postoji pokrivač $\{U\}$ i epimorfizmi $\mathcal{O}_X^n|_U \to F|_U$ $\mathcal{O}_X$-modula

za $\forall U \subseteq X$, i $f: \mathcal{O}_X^n|_U \to F|_U$ morfizam $\mathcal{O}_X$-modula, $\operatorname{Ker} f$ je konačnog tipa.

Pokaže se da je na kompleksnoj mnogostrukosti, snop presjeka vektorskog svežnja (tj. lokalno slobodan snop) uvijek koherentan. (Slijedi iz teorema Oke, koji kaže da je $\mathcal{O}_X$ koherentan).
Zatim se pokaže da je naš τ dovoljno dobar da čuva koherentne snopove.

treba biti proper: praslika kompakta je kompakt. (otprilike)

** Steinova mnogostrukost X je kompleksna mnogostrukost td:

1) X holomorfno konveksna: $\forall K^{komp.} \subseteq X$

$$\hat{K} := \{z \in X : |f(z)| \leq \sup_K |f| \quad \forall f \in \mathcal{O}_X\} \text{ je kompaktan.}$$

(holomorfna konveksna ljuska)

2) X holomorfno separabilan: $\forall x \neq y \in X$
$\exists f \in \mathcal{O}_X$ td $f(x) \neq f(y)$

Steinove podmnogostrukosti su analitički analogon afinih shema iz algebarske geometrije.

Dakle ako je X Steinov, Lerayev spektralni niz kolabira:

$$H^p(Y, \Delta_\eta^k) \cong \bigoplus E_2^{p-q,q} = \begin{pmatrix} \text{jedino } \neq 0 \\ \text{za } p-q=0, \\ \text{tj. } p=q \end{pmatrix}$$

$$= H^0(X, \tau_*^p \Delta_\eta^k) = \Gamma(X, \tau_*^p \Delta_\eta^k)$$

Dobili smo:

$\forall p, q$

$$H^q(Y, \Delta_\eta^p) = \Gamma(X, \tau_*^q \Delta_\eta^p)$$

Zaključak:

Uz pretpostavke:
- Vlakna od $Z \xleftarrow{\eta} Y$ su kontraktibilna pomoću glatke homotopije koja čuva η
- $Y \xrightarrow{\tau} X$ je steinov
- $0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}_E \to \Delta^{\bullet}_{\eta}$ je rezolucija lokalno dobrodim snopovima,

Dobili smo spektralni niz Penroseove transformacije.
(s G-ekvivarijantnim diferencijalima)

$$E_1^{pq} = \Gamma(X, \tau_*^q \Delta^p_\eta) \Rightarrow H^{p+q}(Z, \mathcal{O}_E)$$

Ovime je formaliziran cijeli postupak Penroseove transformacije. Slijede primjeri.

Jet-svežnjevi i diferencijalni operatori

u holomorfnoj kategoriji, ali ovo vrijedi i za druge.

$$E \text{ vektorski svežanj (homogen)}$$
$$\downarrow$$
$$X \quad (= G/P)$$

$k \in \mathbb{N}_0$, $x \in X$

$$J^k_x(E) = \mathcal{O}_{E,x} \Big/ \underbrace{\{\lambda : \partial^I \lambda(x) = 0 \text{ za } |I| \leq k+1\}}_{\text{može i } m_x^{k+1}}$$

(za neku, ekvivalentno sve karte)

(Taylorovom redu funkcije uzmemo samo do stupnja k)

$J^k E = \bigsqcup_{x \in X} J^k_x(E)$ je jet-svežanj stupnja k,

snop prereza je jet-snop stupnja k.

Postoje prirodna preslikavanja:

$$\mathcal{O}_E \xrightarrow{\pi_k} \mathcal{O}_{J^k E}$$

$$E = J^0 E \longleftarrow J^1 E \longleftarrow \cdots \xleftarrow{\pi^k} J^k E \longleftarrow \cdots \longleftarrow \lim_k J^k E =: J^\infty E$$

$$J^\infty E = \{(t_0, t_1, \ldots) : t_k \in J^k E, \ \pi^k(t_k) = t_{k-1}\}$$

Ringe
$$\begin{array}{c} \mathbb{C}\times\mathbb{C} \\ \downarrow \\ \mathbb{C} \end{array}$$

jet-svežnjevi (vlakno iznad 0, što za bilo koju drugu točku):

$$\begin{tikzcd}
& J^0 \arrow[d, equal] & J^1 \arrow[d, equal] & & J^k \arrow[d, equal] & & J^\infty \arrow[d, equal] \\
\mathbb{C} = & \mathcal{O}_0/\langle z\rangle \arrow[d, equal] & \mathcal{O}_0/\langle z^2\rangle \arrow[l] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[l] & \mathcal{O}_0/\langle z^{k+1}\rangle \arrow[l] \arrow[d, equal] & \cdots \arrow[l] & \\
& \mathbb{C} & \mathbb{C}[z]/z^2 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{C}[z]/z^{k+1} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathbb{C}[[z]] \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

Propozicija: Postoji kanonski egzaktan niz:

$$0 \to \underbrace{\odot^k \Omega^1_X \otimes E}_{\mathrm{Hom}(\odot^k T_X, E)} \to J^k E \xrightarrow{\pi^k} J^{k-1}E \to 0$$

$\ker \pi^k = \Big\{$ klice funkcija, koje u Taylorovom razvoju gledamo do stupnja k, a imaju nulu do stupnja $k-1$

$\approx$ homogeni polinomi stupnja k, s koef. iz E

Definicija: E, F vektorski svežnjevi na X

(linearni) diferencijalni operator reda $\leq k$ je

$\mathbb{C}$-linearan morfizam snopova $D : \mathcal{O}_E \longrightarrow \mathcal{O}_F$

koji se faktorizira na sljedeći način:

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{O}_{J^\infty E} \arrow[d, dotted] \\
\mathcal{O}_E \arrow[ur, dashed] \arrow[r, "\pi_k"] \arrow[dr, "D"'] & \mathcal{O}_{J^k E} \arrow[d, "\tilde{D}"] \\
& \mathcal{O}_F
\end{tikzcd}$$

$\tilde{D}$ $\mathcal{O}_X$-linearan, tj.

$$\begin{tikzcd}
J^\infty E \arrow[d] \\
J^k E \arrow[d, "\tilde{D}"] \\
F
\end{tikzcd}$$

ekvivalentno: $f \in \mathcal{O}_E(U)$ td $\pi_k(f)_x = 0$ $\forall x \in U$, tada $D(f) = 0$

Skup svih takvih $=: \mathrm{Diff}_k(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F) \subseteq \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F)$ je $\mathcal{O}_X$-podmodul

$$\mathrm{Diff}_k(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F) = \mathrm{Diff}_k(E, F)$$

(iako to nije morfizam svežnjeva)

$$\mathrm{Diff}_k(E, F) = \mathrm{Hom}(J^k E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_{J^k E}, \mathcal{O}_F)$$

$$\mathrm{Diff}_0(E, F) = \mathrm{Hom}(E, F) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_E, \mathcal{O}_F)$$

$$\ldots \subseteq \mathrm{Diff}_k(E, F) \subseteq \mathrm{Diff}_{k+1}(E, F) \subseteq \ldots$$

<u>Red</u> od D je najmanji k tako da je $D \in \mathrm{Diff}_k(E, F)$.
Za takav operator definiramo (glavni) <u>simbol</u> kao kompoziciju:

$$\sigma(D) : \bigodot^k \Omega^1_X \otimes E \longrightarrow J^k E \xrightarrow{\tilde{D}} F.$$

<u>Propozicija</u> Dva diferencijalna operatora reda k imaju isti simbol $\Longleftrightarrow$ razlika im je dif. op. reda $\leq k-1$.

Neka je sada $X = G/P$ homogen prostor, E homogeni svežanj.
Sjetimo se: G djeluje na lokalne prereze: $f \in \mathcal{O}_E(U)$, $h \in G$

$$\left(h.f : x \longmapsto f(h^{-1}x)\right) \in \mathcal{O}_E(h.U)$$

Tada su svi $J^k E$ također homogeni svežnjevi, π^k, π_k invarijantni

$$J^k E = \bigsqcup_{gP \in G/P} \mathcal{O}_{E,g} \Big/ \{f : \partial^I f(g) = 0 \text{ za } |I| \le k+1\}$$

$[f] \in \mathcal{O}_{E,g}$, $h \in G$ $\quad h.[f] := [h.f : x \longmapsto f(h^{-1}x)] \in \mathcal{O}_{E,hg}$

↳ ovo djelovanje čuva potprostor u nazivniku

Vidimo da je uz to djelovanje $(J^k E)_{eP}$ P-podmodul

$$\Rightarrow \quad J^k E \cong G \times_P (J^k E)_{eP}$$

Nadalje, diferencijalni operator $D : \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_F$ je invarijantan,
ako i samo ako je $\tilde{D} : J^k E \to F$ invarijantan,
ako i samo ako su invarijantni za derivirano (infinitezimalno) djelovanje od G.

Dakle, invarijantni dif. op. je jedinstveno određen svojim djelovanjem na bilo kojem otvorenom skupu. ← [Važno je Penroseova trans. daje inv. dif. op. na otv. skupu.]
Ili s djelovanjem na mlaz od $\mathcal{O}_E$ u eP,
ili vlaknu od $J^k E$ iznad eP. ← [Važno kasnije za vezu s Vermaovim modulima.]

Nadalje, simbol

$$\sigma(D): \quad \odot^k \Omega^1_{G/P} \otimes E \longrightarrow F$$

je također invarijantan.

<u>Princip simbola:</u> Restringiramo ga na vlakno iznad eP,

Dobijemo morfizam P-modula, odnosno L-modula.

Dekomponiramo $\underbrace{(\odot^k \Omega^1_{G/P})_{eP}}_{\odot^k U} \otimes E_{eP}$ u direktnu sumu L_s-ireducibilnih.

Ako je F_{eP} ireducibilan, simbol može postojati samo ako se F_{eP} nalazi u toj dekompoziciji, i može biti samo projekcija na F_{eP}.

14. 4. 2015.

Primjeri Penroseove transformacije

① Prostor twistora na lijevo,

uvodna slika:

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F} = \times\!\!-\!\!\times\!\!-\!\!\circledcirc \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \mathbb{P}_3 = \times\!\!-\!\!\circledcirc\!\!-\!\!\circledcirc & & \circledcirc\!\!-\!\!\times\!\!-\!\!\circledcirc = \mathbb{M} \end{tikzcd}$$

η = projekcija na prvi član

τ = projekcija na 2. član

(prostor twistora)

$= Gr_2(\mathbb{C}^4) = \mathbb{C}S^4$

Prije smo izračunali Hasseov dijagram za prostor Minkowskog:

$$W^P = \{ id \to (2) \to (21), (23) \to (213) \to (2132) \}$$

X = Velika otvorena Schubertova ćelija $\mathbb{M}^I \cong \mathbb{C}^4 \subseteq \mathbb{M}$ (otvorena, gusta)

Fizikalno,

$$\mathbb{M}^I = \mathbb{M} \setminus \left\{ \begin{matrix} \text{svjetlosni konus} \\ \text{u beskonačnosti} \end{matrix} \right\}$$

$$\mathbb{F}^I = \tau^{-1}(\mathbb{M}^I)$$

$$\mathbb{P}^I = \eta(\mathbb{F}^I)$$

$$\Rightarrow \quad \begin{tikzcd} & \mathbb{F}^I \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \mathbb{P}^I & & \mathbb{M}^I \end{tikzcd}$$

U koordinatama:

$$M^I = \left\{ \text{span}\{(1,0,z_{00},z_{10}),\ (0,1,z_{01},z_{11})\} : \overset{\overset{z}{\shortparallel}}{(z_{ij})} \in \mathbb{C}^4 \right\}$$

biholomorfno

<u>Lema:</u> Postoji biholomorfna bijekcija: $f : M^I \times \mathbb{P}_1 \longrightarrow F^I \subseteq \mathbb{F}$

$$f(z, \underset{\overset{\shortparallel}{[N_0,N_1]}}{[N]}) = \Big(\text{span}\{(N_0, N_1, z_{00}\cdot N_0 + z_{01}\cdot N_1, z_{10}\cdot N_0 + z_{11}\cdot N_1)\},$$
$$\text{span}\{(1,0,z_{00},z_{10}),(0,1,z_{01},z_{11})\} \Big)$$

<u>Korolar:</u> Na F^I imamo polu-homogene koordinate:

$$(z,[N]),\quad z \in \mathbb{C}^4,\quad N \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$$

U tim koordinatama,

$$\tau(z,[N]) = z$$

$$\eta(z,[N]) = [N_0, N_1, z_{00}\cdot N_0 + z_{01}\cdot N_1, z_{10}\cdot N_0 + z_{11}\cdot N_1]$$

$$P^I = \eta(F^I) = \{[v_0,v_1,v_2,v_3] : (v_0,v_1) \neq 0\} \subseteq \mathbb{P}^3$$

$$= \mathbb{P}_3 \setminus L,\quad L = \{[0,0,v_2,v_3]\} \cong \mathbb{P}_1$$

<u>Lema</u> Vlakna od $\eta : F^I \to P^I$ su topološki trivijalna.

Dokaz:

$$[\underbrace{v_0\ v_1}_{\neq 0},\ v_2, v_3] \in P^I$$

točke u vlaknu $\eta^{-1}([v]) \cap F^I$ su $(z,[w])$ definirane jednadžbama:

$$\begin{cases} w_0 = v_0 \\ w_1 = v_1 \\ z_{00} \cdot w_0 + z_{01} \cdot w_1 = v_2 \\ z_{10} \cdot w_0 + z_{11} \cdot w_1 = v_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_{00} \cdot v_0 + z_{01} \cdot v_1 = v_2 \\ z_{10} \cdot v_0 + z_{11} \cdot v_1 = v_3 \end{cases}$$

$\Downarrow$

vlakno je 2-dim afini potprostor u $\mathbb{C}^4$

$\Downarrow$

topološki kompaktan.

Pitanje: U knjizi se ovakve stvari nikad ne provjeravaju.
Postoji li nekakva garancija da to uvijek vrijedi za npr. afinu reliku ćeliju ili nešto drugo?

Lema P^I se može pokriti sa dva otvorena Steinova podskupa:

$$A = \{[v_0, 1, v_2, v_3]\} \cong \mathbb{C}^3$$

$$B = \{[1, v_1, v_2, v_3]\} \cong \mathbb{C}^3$$

Njihov presjek je opet Steinov.

(Trebati će nam za Mayer-Vietorisov dugi egzaktan niz)

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{F} = \times - \times - \bullet \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \mathbb{P}_3 = \times - \bullet - \bullet & & \mathbb{M} = \bullet - \times - \bullet \end{tikzcd}$$

$\mathcal{O}(k) = \overset{k}{\times} - \overset{0}{\bullet} - \overset{0}{\bullet}$ linijski svežanj na $\mathbb{P}_3$

Relativnu BGG za $\eta^{-1}\mathcal{O}(k)$ smo napravili prošli put:

$$0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}(k) \to \underbrace{\overset{k}{\times} - \overset{0}{\times} - \overset{0}{\bullet} \to \overset{k+1}{\times} - \overset{-2}{\times} - \overset{1}{\bullet} \to \overset{k+2}{\times} - \overset{-3}{\times} - \overset{0}{\bullet}}_{\text{trebaju nam direktne slike ovih snopova duž } \tau.} \to 0$$

Relativni Hasse za τ:

$$\overset{1}{\times} - \overset{0}{\times} - \overset{0}{\bullet} \overset{(1)}{\longmapsto} \overset{-1}{\times} - \overset{1}{\times} - \overset{0}{\bullet} \quad \Rightarrow \quad W_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{q}} = \{id, (1)\}$$

$\boxed{\text{Slučaj 1}}$ $k < -2$, tj. $\underbrace{-k-2}_{\text{pozitivan helicitet}} > 0$

$$\tau_*^1 \left(\overset{k}{\times} - \overset{0}{\times} - \overset{0}{\bullet} \right) = \overset{-k-2}{\bullet} - \overset{k+1}{\times} - \overset{0}{\bullet}$$

$$\tau_*^1 \left(\overset{k+1}{\times} - \overset{-2}{\times} - \overset{1}{\bullet} \right) = \overset{-k-3}{\bullet} - \overset{k}{\times} - \overset{1}{\bullet}$$

$$\tau_*^1 \left(\overset{k+2}{\times} - \overset{-3}{\times} - \overset{0}{\bullet} \right) = \begin{cases} \overset{-k-4}{\bullet} - \overset{k}{\times} - \overset{0}{\bullet} & : \quad k \leq -4 \\ 0 & : \quad k = -3 \end{cases}$$

- Spektralni niz hiperkohomologije:

$$E_1^{pq} = H^q(F_1^I, \Delta_\eta^p) \Longrightarrow H^{p+q}(F_1^I, \eta^{-1}\mathcal{O}(k))$$

$\|$ (Leray) $\qquad\qquad$ $\|$ (vlakna od η kontraktibilna)

$$\Gamma(M_1^I, \tau_*^q \Delta_\eta^p) \Rightarrow H^{p+q}(P_1^I, \mathcal{O}(k))$$

Uzmimo prvo $k = -3$

- $E_1^{pq} =$

0	0	0
$\overset{1}{\bullet} - \overset{-2}{\times} - \overset{0}{\bullet} \xrightarrow{d} \overset{0}{\bullet} - \overset{-3}{\times} - \overset{1}{\bullet}$		0
0	0	0

(u zapisu u tablici izostavljamo $\Gamma(M_1^I, -)$)

$E_2^{pq} =$

0	0	0	0	0	0
0	0	Ker d	Coker d	0	0
0	0	0	0	0	0

$= E_\infty^{pq}$

Zaključak:

$$H^1(\mathbb{P}^I_1, \mathcal{O}(-3)) \cong \operatorname{Ker}\left(\Gamma\big(M^I_1, \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\big) \xrightarrow{d} \Gamma\big(M^I_1, \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\big)\right)$$

$$H^2(\mathbb{P}^I_1, \mathcal{O}(-3)) \cong \operatorname{Coker}\left(\Gamma\big(M^I_1, \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\big) \xrightarrow{d} \Gamma\big(M^I_1, \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\big)\right)$$

↳ dokažimo da je ovo 0, tj. da je d surjektivan (posebno $d \neq 0$).

$$\mathbb{P}^I_1 = A \cup B, \qquad A, B, A \cap B \text{ Steinovi.}$$

Mayer–$\underset{1891-2002}{\underline{\text{Vietoris}}}$ egzaktan niz:

$$\cdots \to \underbrace{H^1(A \cap B, F)}_{\substack{\| \\ 0}} \to H^2(\mathbb{P}^I_1, F) \to \underbrace{H^2(A, F) \oplus H^2(B, F)}_{\substack{\| \\ 0}} \to H^2(A \cap B, F) \to \cdots$$

(Ako je F koherentan)

$$\Rightarrow H^k(\mathbb{P}^I_1, F) = 0, \quad \forall k \geq 2$$

[Postoji spektralni niz koji povezuje Čechovu kohomologiju s obzirom na zadani pokrivač sa snopovskom kohomologijom. Ako je taj pokrivač dvočlan, spektralni niz se raspada u Mayer-Vietorisa]

Potrebno je još identificirati dobiveni diferencijalni operator d, a to se napravi preko njegovog simbola:

$$\odot^{\ell}\Omega^1 \otimes \left(\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) \longrightarrow \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\Omega^1 = \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

Jedina mogućnost je za $\ell = 1$, (Dakle diferencijalni operator stupnja 1)

$$\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \otimes \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} = \overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{-4}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \oplus \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\Big\downarrow \ \sigma(d) \text{ proporcionalan projekciji}$$

$$\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

Pitanje: Zašto je to jedina mogućnost?

Izračunati dekompoziciju $\left(\odot^{\ell}\, \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\right) \otimes \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$, za svaki ℓ?

Zatim se prepozna da je to simbol Diracovog operatora (koji u Penroseovoj notaciji izgleda: $\phi_{A'} \longrightarrow \nabla_{A}^{A'}\phi_{A'}$).

Dobili smo: $H^1(\mathbb{P}^I, \mathcal{O}(-3))$ = Rješenja Diracove jednadžbe
= klasični desno-ruki neutrini bez mase.

Slučaj $k < -3$

$$\tau_1^*\left(\overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) = \overset{-k-2}{\bullet}\!-\!\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

$$\tau_1^*\left(\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\right) = \overset{-k-3}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\tau_1^*\left(\overset{k+2}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) = \overset{-k-4}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

$$E_1^{pq} = \begin{array}{ccccc} 0 & & 0 & & 0 \\ \overset{-k-2}{\bullet}\!-\!\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} & \xrightarrow{d_1} & \overset{-k-3}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} & \xrightarrow{d_2} & \overset{-k-4}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \\ 0 & & 0 & & 0 \end{array}$$

$$E_2^{pq} = \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \operatorname{Ker} d_1 & \operatorname{Ker} d_2 / \operatorname{Im} d_1 & \operatorname{coker} d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} = E_\infty^{pq}$$

$$* \quad H^1(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(k)) = \operatorname{Ker}\left(\Gamma\left(M_1^I, \overset{-k-2}{\bullet}\!-\!\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) \xrightarrow{d_1} \Gamma\left(M_1^I, \overset{-k-3}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\right)\right)$$

$0 = H^2(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(k)) = \operatorname{Ker} d_2 / \operatorname{Im} d_1 \Rightarrow \operatorname{Ker} d_2 = \operatorname{Im} d_1$

$0 = H^3(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(k)) = \operatorname{Coker} d_2 \Rightarrow d_2$ surjektivan

ista formula vrijedi
i za $k = -3$.

Simbol od d_1 je: (opet stupnja 1)

$$\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \otimes \overset{-k-2}{\bullet}\!-\!\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} = \overset{-k-1}{\bullet}\!-\!\overset{k-1}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \oplus \overset{-k-3}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

$$\downarrow$$

$$\overset{-k-3}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

Pitanja:
- Zašto je to jedino moguće?
- Kako znamo da $d_1 \neq 0$?
- Što ako bi bilo više mogućnosti za simbole?

Tu je simbol Dirac-Weylovog operatora

$H^1(\mathbb{P}^+, \mathcal{O}(k))$ = rješenja od „zero rest mass field equations of helicity $\frac{1}{2}(-k-2) > 0$", za $k < -2$

$\boxed{\text{Slučaj 2}}$ $\quad k > -2$, tj. $\underbrace{-k-2 < 0}_{\text{negativan helicitet}}$

BGG: $0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}(k) \to \overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \to \overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \to \overset{k+2}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \to 0$

$$\tau_*^0\left(\overset{k}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) = \begin{cases} 0 & : k = -1 \quad (\text{i svi ostali } \tau_*^i \text{ u tom slučaju}) \\ \overset{k}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} & ; k \geq 0 \end{cases}$$

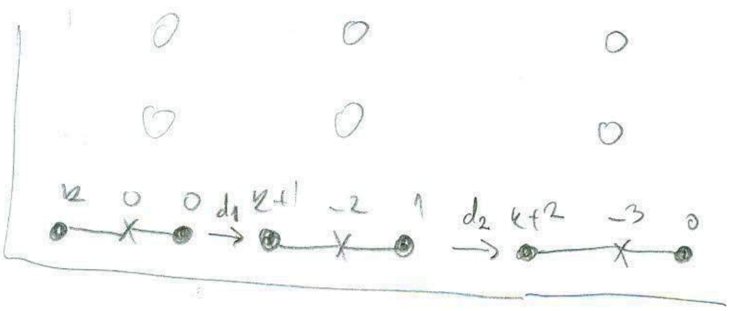
$$\tau_*^0\left(\overset{k+1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\right) = \overset{k+1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}$$

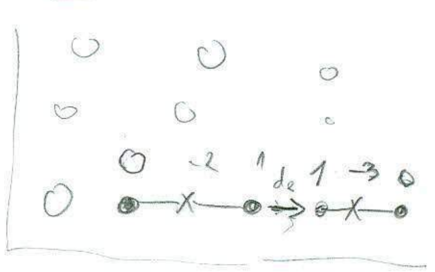
$$\tau_*^0\left(\overset{k+2}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) = \overset{k+2}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

Pretp. $k \geq 0$

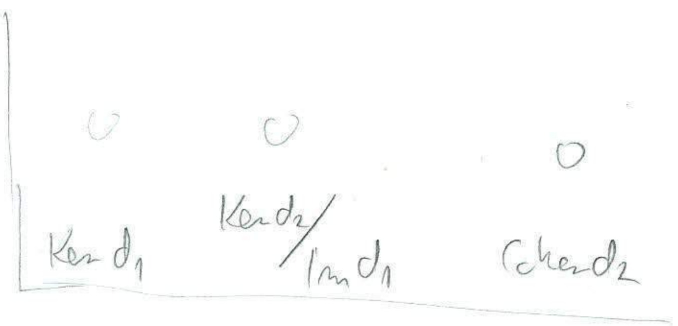
$k = -1$

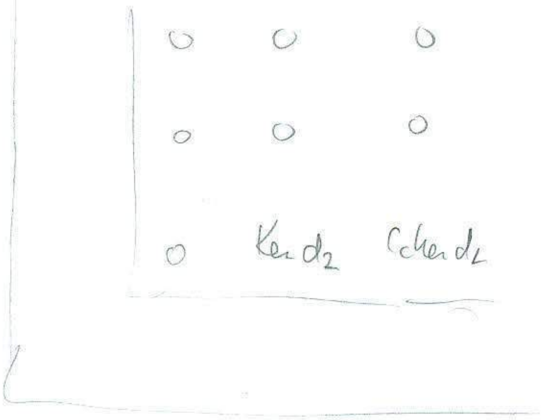
$E_1^{pq} =$





$E_2^{pq} = E_\infty^{pq}$



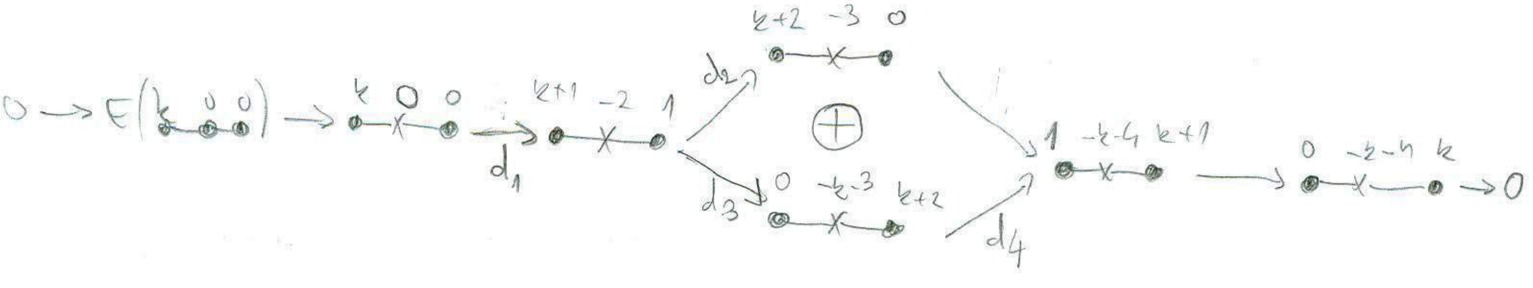


$$H^1(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(k)) \cong \frac{\operatorname{Ker}\ \Gamma(M_1^I, \overset{k+1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}) \longrightarrow \Gamma(M_1^I, \overset{k+2}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet})}{\operatorname{Im}\ \Gamma(M_1^I, \overset{k}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}) \longrightarrow \Gamma(M_1^I, \overset{k+1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet})}$$

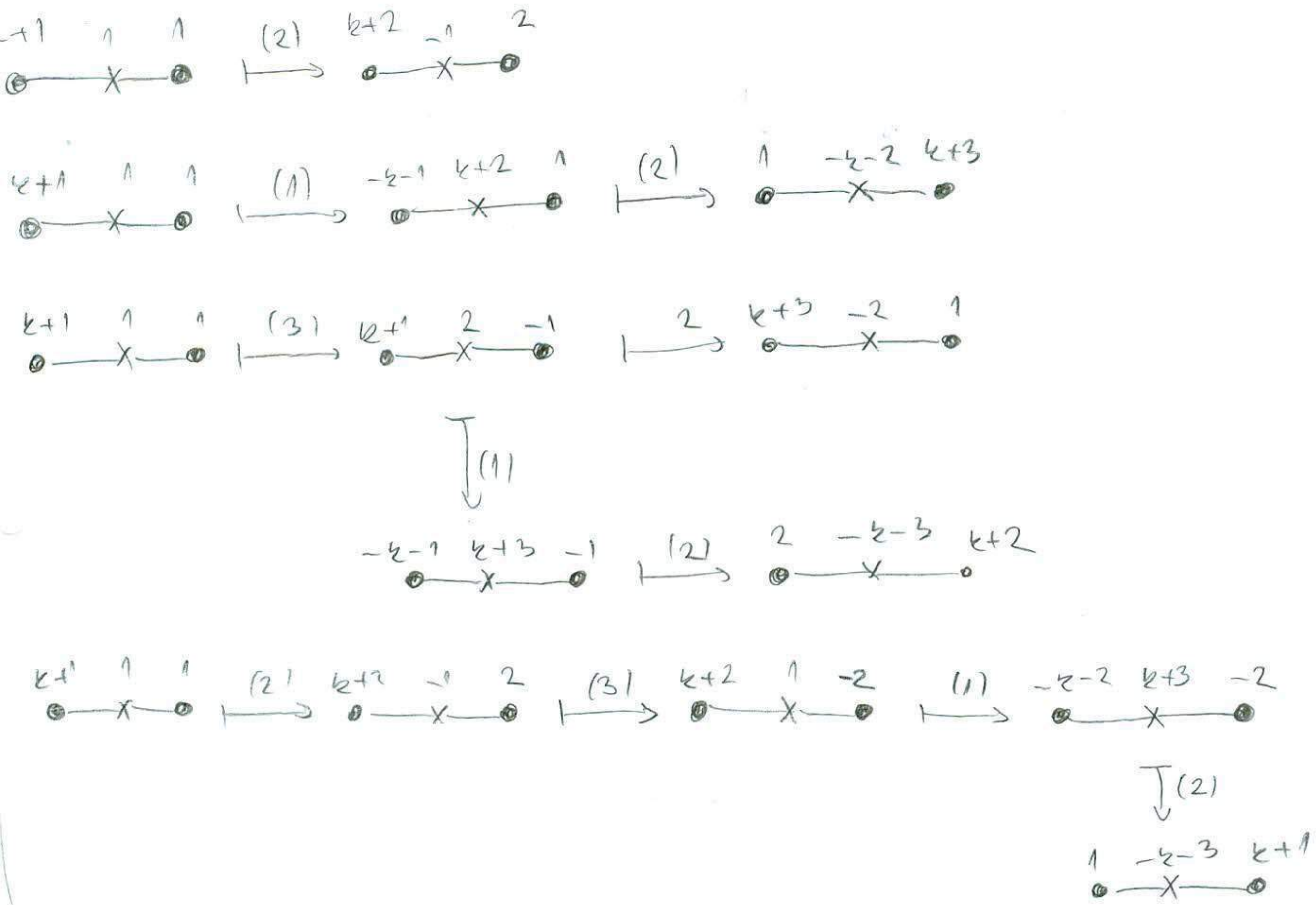
(operatori su standardni, jer su nulte-dijelke slike standardnih)

Ovo možemo dalje pojednostaviti koristeći sljedeći trik? Ili generalnu metodu?

Nađemo punu BGG rezoluciju od $E(\overset{k}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet})$ na $\bullet\!-\!\times\!-\!\bullet$:



(zbog jedinstvenosti standardnih morfizama) podgetnik: $W = \{ \begin{tikzcd}[column sep=small] id \arrow[r] & (2) \arrow[r] \arrow[dr] & (21) \arrow[r] & (213) \arrow[r] & (2132) \\ & & (23) \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \}$



Iz egzaktnosti od BGG lako sledi:

$$\mathrm{Ker}\, d_2 / \mathrm{Im}\, d_1 \overset{d_3}{\cong} \mathrm{Ker}\, d_4$$ (izomorfizem snopov na o—x—o)

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{Ker}\, \Gamma(M^I, d_2)}{\mathrm{Im}\, \Gamma(M^I, d_1)} \cong \mathrm{Ker}\, \Gamma(M^I, d_4)$$, jer je:

<u>Lema</u> M^I Steinov, $\Gamma(M^I, -)$ je egzakten na kategoriji koherentnih snopov.

<u>dokaz</u>: $0 \to F \to G \to H \to 0$

$$\Rightarrow 0 \to \Gamma(M^I, F) \to \Gamma(M^I, G) \to \Gamma(M^I, H) \to \underbrace{H^1(M^I, F)}_{= 0} \to \dots$$ (Cartanov Teorem B)

$$\Rightarrow$$

$$H^1(\mathbb{P}^I_1, \mathcal{O}(k)) \cong \frac{\mathrm{Ker}\, \Gamma\big(M^I_1, \overset{k+1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\big) \longrightarrow \Gamma\big(M^I_1, \overset{k+2}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\bullet\big)}{\mathrm{Im}\, \Gamma\big(M^I_1, \overset{k}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\big) \longrightarrow \Gamma\big(M^I_1, \overset{k+1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\big)}$$

$$\cong \mathrm{Ker}\, \Gamma\big(M^I_1, \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-k-3}{\times}\!-\!\overset{k+2}{\bullet}\big) \longrightarrow \Gamma\big(M^I_1, \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-k-4}{\times}\!-\!\overset{k+1}{\bullet}\big)$$

$\Rightarrow$ Fizičari to vide kao rješenja od „zero rest mass field equation of negative helicity".

dok Ker/Im zovu „potencijali modulo gauge"

Za $k=0$ dobijemo klasične Maxwellove jednadžbe na M^I_1 i elektromagnetske potencijale.

$\boxed{\text{Slučaj 3}}$ $k=-2$, (izdvojen jer je singularniji od oba prethodna slučaja i spektralnom nizu duže treba do konvergencije)

BGG: $0 \to \eta^{-1}\mathcal{O}(-2) \to \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{-1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow 0$

$$\tau^1_*\big(\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\big) = \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

$$\tau^r_*\big(\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\big) = 0 \quad , \forall r$$

$$\tau^0_*\big(\overset{0}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\big) = \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

$$E_1^{pq} = \begin{array}{|lll} 0 & 0 & 0 \\ \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \\ \hline \end{array}$$

$$E_2^{pq} = \begin{tikzcd} 0 & 0 & 0 \\ \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \arrow[drr, "\square"] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \end{tikzcd}$$

$$E_3^{pq} = \begin{array}{|lll} \operatorname{Ker} \square & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \operatorname{Coker} \square \\ \hline \end{array}$$

$$\parallel$$

$$E_\infty^{pq}$$

$$\Rightarrow \quad H^1(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(-2)) = \operatorname{Ker} \Gamma(M_1^I, \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}) \xrightarrow{\ \square\ } \Gamma(M_1^I, \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet})$$

$$0 = H^2(\mathbb{P}_1^I, \mathcal{O}(-2)) = \operatorname{Coker} \square \Rightarrow \square \text{ surjektivan, } \neq 0 .$$

Simbol: pokaže se da je jedina mogućnost reda 2

$$\odot^2 \Omega^1_{M^I} = \odot^2 \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} \cong \overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{-4}{\times}\!-\!\overset{2}{\bullet} \oplus \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

$$\begin{tikzcd} \odot^2 \Omega^1_{M^I} \otimes \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \cong \overset{2}{\bullet}\!-\!\overset{-5}{\times}\!-\!\overset{2}{\bullet} \oplus \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \arrow[d, "c \cdot \sigma(\square)"] \\ \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \end{tikzcd}$$

Iz toga se prepozna da je $\square : \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \to \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$ valni operator.

Može se pokazati da standardni operator $\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$ ispadne 0 (postoje dovoljni uvjeti koji se mogu provjeriti).

Dakle, Penroseova transformacija nam je dala nestandardni operator $\square : \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$.

U knjizi se još računaju Penroseove transformacije od

$\Omega^1_{\mathbb{P}^3} = \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}$

$\Omega^2_{\mathbb{P}^3} = \overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{1}{\bullet}$

$\Theta = \overset{1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{1}{\bullet}$
(holomorfni tangencijalni svežanj)

Jedan od najvažnijih rezultata teorije twistora
$H^1(\mathbb{P}^I, \Theta) \longleftrightarrow$ deformacije od $\mathbb{P}^I$, što može simulirati tzv. nelinearne gravitone, tj. gravitaciju.
(Penrose, Kodaira, Spencer)

$\mathcal{E} = \overset{0}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}$
(Einsteinov svežanj)

Za fizikalne potrebe.

② Prostor ambitwistora na ljevoj

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{B} = \times\!-\!\times\!-\!\times \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\tau"] & \\ \mathbb{A} = \times\!-\!\bullet\!-\!\times & & \mathbb{M} = \bullet\!-\!\times\!-\!\bullet \end{tikzcd}$$

$$\mathbb{M} \supseteq \mathbb{M}^I \cong \mathbb{C}^4, \quad \mathbb{B}^I = \tau^{-1}(\mathbb{M}^I), \quad \mathbb{A}^I = \eta(\mathbb{B}^I)$$

Slično kao prije, ali kompliciranije, u koordinatama se može pokazati da su vlakna od η u $\mathbb{A}^I$ topološki trivijalna.

$$\mathbb{B}^I \cong \mathbb{M}^I \times \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$$

<u>Lema</u>: $\mathbb{A}^I$ se može pokriti s tri Steinova podskupa

<u>Korolar</u>: $H^p(\mathbb{A}^I, F) = 0 \quad \forall p \geq 3$, F koherentan

Za dokaz treba ipak malo jači argument od Majer-Vietorisa. Slijedi iz

<u>Teorem</u> (Leray) Neka je $\mathfrak{U} = \{U_\alpha\}$ otvoren pokrivač od X, F snop td $H^q(U_{\alpha_1} \cap \dots \cap U_{\alpha_k}, F) = 0 \quad \forall q > 0$ i $\forall$ konačan presjek iz pokrivača.

Tada $$\check{H}^p(\mathfrak{U}, F) = H^p(X, F).$$

Gdje je $\check{H}(\mathcal{U}, F)$ Čechova kohomologija snopa F s obzirom na pokrivač $\mathcal{U}$, tj. kohomologija kolančanog kompleksa: $\check{C}^\bullet(\mathcal{U}, F)$

$$\left\{\begin{array}{l} \check{C}^m(\mathcal{U}, F) = \prod\limits_{\alpha_0 < \dots < \alpha_m} F(U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_m}) \\ d : \check{C}^m(\mathcal{U}, F) \to \check{C}^{m+1}(\mathcal{U}, F) \\ (d\,t)_{\alpha_0, \dots, \alpha_{m+1}} = \sum\limits_{k=0}^{m+1} (-1)^k \, t_{\alpha_0, \dots, \hat{\alpha}_k, \dots, \alpha_{m+1}}\Big|_{U_{\alpha_0} \cap \dots \cap U_{\alpha_{m+1}}} \end{array}\right.$$

(nep. skup indeksa dobro uređen)

Vidimo da je $\check{C}^m(\mathcal{U}, F) = 0$ za $m \geq \operatorname{kard} \mathcal{U}$

$$\Rightarrow \quad \check{H}^m(\mathcal{U}, F) = 0 \quad \text{za } m \geq \operatorname{kard} \mathcal{U}$$

Iz toga slijedi dokaz korolara.

Lerayev teorem nije pretežak, indukcijom + dijagram chasing.

Relativni Hasse za lijevu filtraciju $= \{ id \to (2) \}$

Relativna BGG:

$$0 \to \eta^{-1}\left(\overset{p}{\times} - \overset{q}{\bullet} - \overset{r}{\times}\right) \to \overset{p}{\times} - \overset{q}{\times} - \overset{r}{\times} \to \overset{p+q+1}{\times} - \overset{-q-2}{\times} - \overset{r+q+1}{\times} \to 0$$

Relativni Hasse za desnu filtraciju $= \left\{ \begin{array}{ccc} & (1) & \\ id \nearrow & & \searrow (13) \\ \searrow & (3) & \nearrow \end{array} \right\}$

Uzmimo $p = q = r = 0$

$$0 \longrightarrow \eta^{-1}\mathcal{O}_{A^I} \longrightarrow \overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} \longrightarrow \overset{1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\times} \longrightarrow 0$$

$$\tau_*^0\left(\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\right) = \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} = \mathcal{O}_{M^I}$$

$$\tau_*^0\left(\overset{1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}\right) = \overset{1}{\bullet}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\bullet} = \Omega^1_{M^I}$$

$$E_1^{pq} = \begin{array}{|ccc} 0 & 0 & 0 \\ \Gamma(M^I, \mathcal{O}) & \xrightarrow{d} \Gamma(M^I, \Omega^1) & 0 \\ \hline \end{array}$$

{pokaže se $d =$ običan vanjski diferencijal}

$$E_2^{pq} = \begin{array}{|cc} 0 & 0 \\ \operatorname{Ker} d & \operatorname{Coker} d \\ \hline \end{array} = E_\infty^{pq}$$

$$\Gamma(A^I, \mathcal{O}_{A^I}) = \operatorname{Ker} d = \mathbb{C}$$

$$H^1(A^I, \mathcal{O}_{A^I}) = \operatorname{Coker} d \cong$$

$$= \operatorname{Ker} \Gamma(M^I, \Omega^2) \xrightarrow{d} \Gamma(M^I, \Omega^3)$$

(zatvorene 2-forme)

de Rhamova rezolucija na M:

$$0 \to \mathbb{C} \to \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \to \Omega^3 \to \dots$$

[<u>Napomena</u>: ukoliko je BGG rezolucija kratki egzaktni niz, (spektralni niz hiperkohomologije) = (dugi egzaktni kohomologije)]

To nije dobro iz fizikalnih razloga
(jer nisu uključena tzv. Maxwellova polja),
pa se računaju Penroseove transformacije kompliciranijih
svežnjeva $\mathcal{O}_{(k)} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}\times\mathbb{P}^*}/I^{k+1}$, gdje je I snop ideala
ulaganja koje dolazi od dvostruke filtracije: $A = \times\!-\!\bullet\!-\!\times$

$$\begin{array}{ccc} & A = \times\!-\!\bullet\!-\!\times & \\ \swarrow & & \searrow \\ \mathbb{P} = \times\!-\!\bullet\!-\!\bullet & & \bullet\!-\!\bullet\!-\!\times = \mathbb{P}^* \end{array}$$

$\mathcal{O}_{(k)}$ k-to formalno
susjedstvo od A^I.

Čini mi se da $\mathcal{O}_{(k)}$ nije homogen snop.
Postoji egzaktan niz: $0 \to \overset{-2}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{k}{\times} \to \mathcal{O}_{(k)} \to \mathcal{O}_{(k-1)} \to 0$

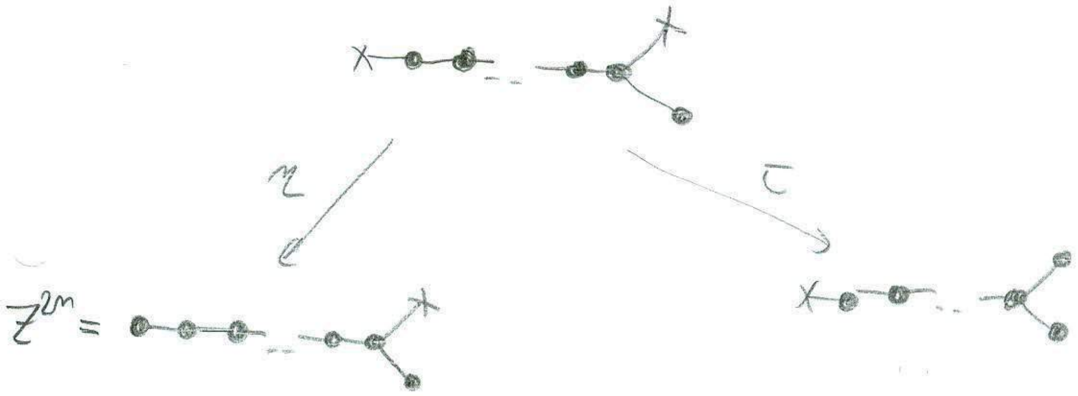
21.4.2015.

Višedimenzionalne situacije (samo vježbe iz Penroseove konstrukcije)

$\mathbb{M}$ =  $= \mathbb{C}S^4 = Gr_2(\mathbb{C}^4)$

③ Konformalni slučaj, parna dimenzija

(n+1 vrh)



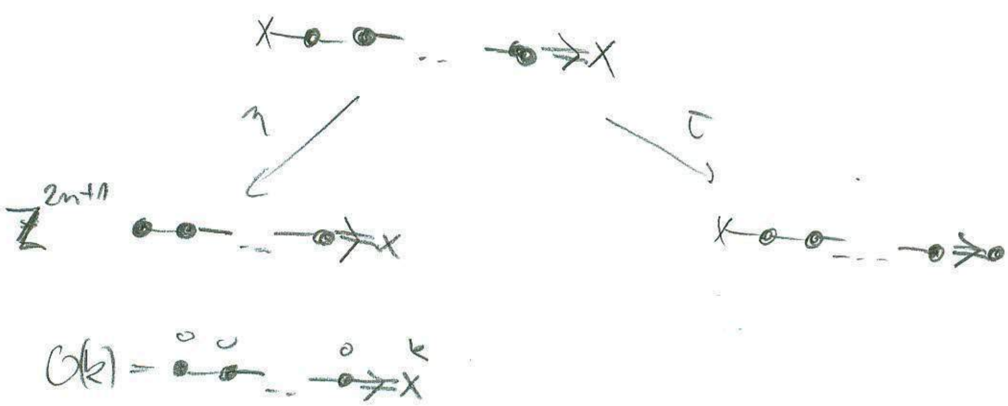
Hopfovi linijski svežnjevi:

$\mathcal{O}(k) =$ 

(jedini homogeni linijski svežnji)

④ Konformalni slučaj, neparna dimenzija

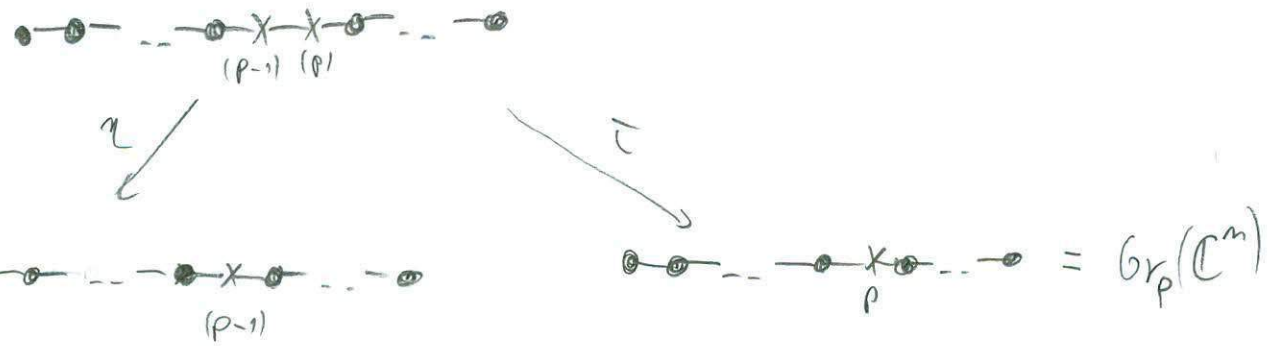
(n+1 vrh)



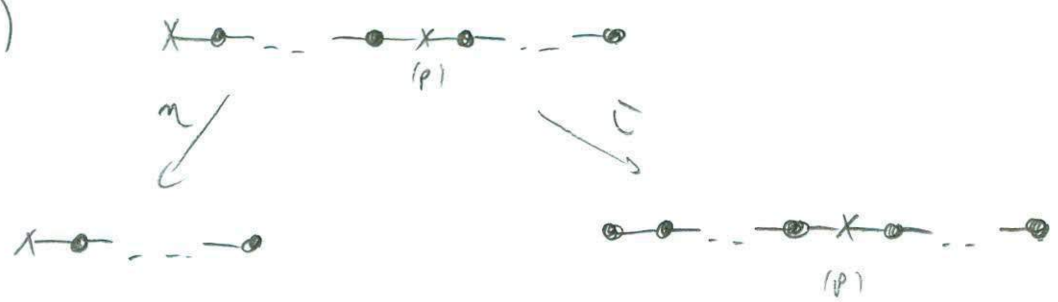
$\mathcal{O}(k) =$

5) Grassmannianska generalizacija

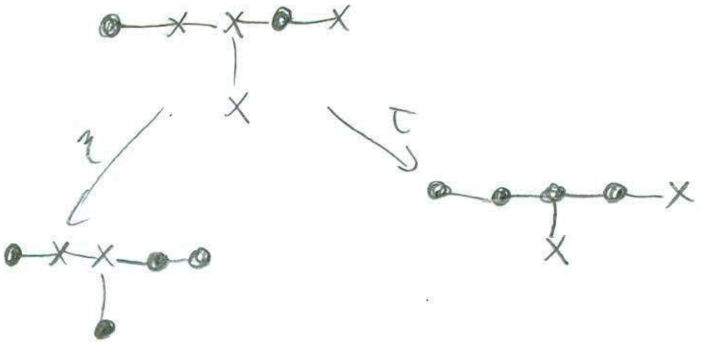
a)



b)



6) Izuzetan primjer E_6



$\lambda =$ 

Wardova korespodencija = nelinearna verzija Penroseove transformacije

Konstrukcija diskretnih serija od $su(1,1)$ preko Twistor-transf.

(Generalizirani) Vermaovi moduli

$\mathfrak{g}$ poluprosta kompleksna Liejeva algebra

$\cup$

$\mathfrak{p} = \mathfrak{l} \dot{+} \mathfrak{u}$

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}^- \dot{+} \mathfrak{l}$

$\lambda \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ integralan i dominantan za $\mathfrak{p}$, $F_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ = ired. repr. od $\mathfrak{p}$ najveće težine λ

$F_{\mathfrak{p}}(\lambda)^* = E_{\mathfrak{p}}(\lambda)$

(u slučaju $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$ (običan Vermaov modul)

$= \mathbb{C}_\lambda = \mathbb{C}$, $\mathfrak{h}$ djeluje s λ, $\mathfrak{n}$ djeluje s 0)

Gen. Vermaov modul: $M_{\mathfrak{p}}(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F_{\mathfrak{p}}(\lambda) = \operatorname{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}} F_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ (proširenje skalara)

To je $U(\mathfrak{g})$-modul, za množenje slijeva.

Svojstva

- $M_{\mathfrak{p}}(\lambda) \cong U(\mathfrak{u}^-) \otimes_{\mathbb{C}} F_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ $\quad (\Leftarrow \text{PBW})$
- $M_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ = direktna suma svojih težinskih potprostora koji su konačnodimenzionalni.
- $v^+ \in F_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ najveće težine λ, multipliciteta 1, $\Rightarrow$ $1 \otimes v^+$ najveće težine

- $M_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ je lokalno $U(\mathfrak{u})$-konačan
- $1 \otimes v^+$ generira $M_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ kao $U(\mathfrak{g})$-modul

- Frobeniusov reciprocitet: $\operatorname{Ind}_{\mathfrak{p}}^{\mathfrak{g}} \dashv \operatorname{For}$ (egzaktan), tj. W $\mathfrak{g}$-modul,

$$\operatorname{Hom}_{\mathfrak{p}}(V, W) \cong \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_{\mathfrak{p}}(\lambda), W)$$

- $M_{\mathfrak{p}}(\lambda)$ ima jedinstven maksimalan pravi podmodul i jedinstven ireducibilan kvocijent $L(\lambda)$ (najveće težine λ)

Neka je sada $\mathfrak{p} = \mathfrak{b} = \mathfrak{h} + \mathfrak{n}$.

Frobeniusov tm postaje: (univerzalno svojstvo Vermanovih modula)

V $\mathfrak{g}$-modul najveće težine λ td maksimalni vektor generira V
(pokaže se da je takav jedinstven)

$\Rightarrow \exists! \ \mathbb{C}_\lambda \xrightarrow{\neq 0} V$ $\mathfrak{b}$-invarijantan (do na skalar)

$\Rightarrow \exists. \ M_\mathfrak{b}(\lambda) =: V(\lambda) \longrightarrow V$ $\mathfrak{g}$-inv, $\neq 0 \Rightarrow$ epi

$\Rightarrow V$ je kvocijent od $V(\lambda)$

$\Rightarrow M_\mathfrak{p}(\lambda)$ je kvocijent od $V(\lambda)$, za $\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{b}$

$\Rightarrow M_\mathfrak{p}(\lambda)$ i $V(\lambda)$ imaju isti jedinstven ireducibilan kvocijent $L(\lambda)$.

Vrijedi: $L(\lambda)$ kon. dim. $\Leftrightarrow$ λ dominantan, integralan za $\mathfrak{g}$
$\parallel$
$F(\lambda)$

$V(\lambda) = L(\lambda) \Leftrightarrow \lambda + \rho$ antidominantan
(ne nužno integralan)

Korespodencija : $\mathcal{O}_p(\lambda) \longleftrightarrow M_p(\lambda)$, λ g-integralan p-dominantan

$\pi : P \to GL(E_p(\lambda))$

$d\pi : \mathfrak{p} \to \mathfrak{gl}(E_p(\lambda)) \Rightarrow X \in \mathfrak{p}, \; d\pi(X) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi(e^{tX})$

$\mathfrak{g} \simeq$ lijevo invarijantna vektorska polja na G, tj.

$X \in \mathfrak{g}, \; f \in \mathcal{O}_p(\lambda)$

$$(Xf)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(ge^{tX})$$

derivacija djelovanja $(g.f)(h) = f(g^{-1}h)$ je $(X.f)(h) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(e^{-tX}h)$

Lema

$X \in \mathfrak{p}, \; f \in \mathcal{O}_p(\lambda)$, tada $Xf = -d\pi(X) \cdot f$

dokaz $(Xf)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0 f(g\underbrace{e^{tX}}_{\in P}) = \frac{d}{dt}\Big|_0 \pi(e^{-tX}) \cdot f(g) = -d\pi(X) \cdot f(g)$

$U(\mathfrak{g}) \simeq$ lijevo-invarijantni diferencijalni operatori $\mathcal{O}_G \to \mathcal{O}_G$

Gledamo preslikavanje :

lijevo inv. diff. operatori konačnog reda.

$$U(\mathfrak{g}) \times F_p(\lambda) \longrightarrow {}_G\mathrm{Diff}(\mathcal{O}_p(\lambda), \underbrace{\mathcal{O}_{G/P}}_{\substack{\| \\ \mathcal{O}_p(0) \\ \| \\ \text{trivijalan svežanj s vlaknom } \mathbb{C}}})$$

(Drugim riječima zadati P-invar. op. $J^k\mathcal{O}_p(\lambda)_{eP} \to \mathbb{C}$)

$$(X, v) \longmapsto \Big(\underset{\substack{\Uparrow \\ \mathcal{O}_P(\lambda) \text{ oko } e.}}{f} \longmapsto \underset{\substack{\Uparrow \\ F_P(\lambda) = E_P(\lambda)^*}}{v} \big(\underbrace{(X(f)(e))}_{\substack{\Uparrow \\ E_P(\lambda)}} \big) \in \mathbb{C} \Big)$$

Za $X \in \mathfrak{p}$ $\qquad v\big(X(f)(e)\big) \overset{\text{Lema}}{=\!=} v\big(-d\pi(X)(f(e))\big)$

$$= (d\pi)^*(v)\big(f(e)\big)$$

$\Downarrow$

(X, v) i $(1, (d\pi)^*(X)v)$ se preslikaju u isti dif. op.

$$\Rightarrow \quad U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F_P(\lambda) = M_P(\lambda) \longrightarrow {}_G\mathrm{Diff}\big(\mathcal{O}_P(\lambda), \mathcal{O}_{G/P}\big)$$

$$\big(= \mathrm{Diff}(\mathcal{O}_P(\lambda), \mathcal{O}_{G/P})_{eP} \big)$$

(svi dif. op. u eP)

<u>Prop:</u> To je izomorfizam $\mathfrak{g}$-modula.

surjektivno: raspisivanje, ali očito

$\mathfrak{g}$-invarijantno: očito

injektivno: $\quad U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F(\lambda) \cong U(\mathfrak{u}^-) \otimes_{\mathbb{C}} F(\lambda)$

$\{Y^\beta \otimes v_i\}$ baza nad $\mathbb{C}$, $\quad \{Y_i\}$ za $\mathfrak{u}^-$

$\{v_i\}$ za $F(\lambda)$

$\downarrow$

lin. nez. operatore

Prethodna korespodencija poštuje filtracije:

$$M_\mathfrak{p}(\lambda)_k := U(\mathfrak{u}^-)_k \otimes_\mathbb{C} F_\mathfrak{p}(\lambda) \cong \mathrm{Hom}(\underbrace{J^k \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda), \text{triv. sn. } \mathbb{C}}_{\text{inv. dif. op. reda } \leq k})$$

$$\cong (J^k \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda))^* \qquad \text{(kon. dim.)}$$

$$\Rightarrow \quad M_\mathfrak{p}(\lambda)_k^* \cong J^k \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} \quad \text{, izomorfizam } \mathfrak{p}\text{-modula.}$$

$$E_\mathfrak{p}(\lambda) = \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} = J^0\mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} \leftarrow J^1 \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} \leftarrow \dots \leftarrow \lim J^k \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} = J^\infty \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP}$$

$$F_\mathfrak{p}(\lambda) = M_\mathfrak{p}(\lambda)_0 \longrightarrow M_\mathfrak{p}(\lambda)_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow \operatorname{colim} M_\mathfrak{p}(\lambda)_k = M_\mathfrak{p}(\lambda)$$

ovi nizovi su međusobno dualni, tj. kontragredijentni kao P-moduli.

$$J^\infty \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} = \lim J^k \mathcal{O}_\mathfrak{p}(\lambda)_{eP} = \lim \mathrm{Hom}(M_\mathfrak{p}(\lambda)_k, \mathbb{C})$$

$$= \mathrm{Hom}(\operatorname{colim} M_\mathfrak{p}(\lambda)_k, \mathbb{C})$$

$$= M_\mathfrak{p}(\lambda)^* \quad , \quad \text{izo. kao } \mathfrak{g}\text{-modul}$$

Neka je sada $D : \mathcal{O}_p(\lambda) \to \mathcal{O}_p(\nu)$ invarijantan diferencijalni operator.

Takvi su u 1-1 korespondenciji s morfizmima svežnjeva,

$$J^\infty \mathcal{O}_p(\lambda) \longrightarrow J^k \mathcal{O}_p(\lambda) \longrightarrow \mathcal{O}_p(\nu) \qquad (\text{za neki } k)$$

1-1

i zbog invarijantnosti jednoznačno određeni na vlaknu nad eP

$$M_p(\lambda)^* \longrightarrow M_p(\lambda)_k^* \longrightarrow E_p(\nu) \qquad (p\text{-invarijantno})$$

1-1

Uzimanjem kontragredijentnih modula:

$$F_p(\nu) \longrightarrow M_p(\lambda)_k \hookrightarrow M_p(\lambda)$$

1-1

$$F_p(\nu) \longrightarrow M_p(\lambda)$$

(jer je slika svakog takvog homomorfizma kon. dim. pa je sadržana u nekom $M_p(\lambda)_k$)

1-1

$$M_p(\nu) \xrightarrow{g\text{-inv.}} M_p(\lambda)$$

Frobenius: $\mathrm{Hom}_p(F_p(\nu), M_p(\lambda)) \cong \mathrm{Hom}_g(M_p(\nu), M_p(\lambda))$

Dakle: $\left\{ \begin{array}{c} \text{Inv. dif. op.} \\ \mathcal{O}_p(\lambda) \to \mathcal{O}_p(\mu) \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \mathrm{Hom}_{\mathfrak{g}}(M_p(\mu), M_p(\lambda))$

Kanonski egzaktan niz svežnja:

$0 \to \bigodot^k \mathfrak{u}_2^1 \otimes \mathcal{O}_p(\lambda) \to J^k\mathcal{O}_p(\lambda) \to J^{k-1}\mathcal{O}_p(\lambda) \to 0$ u kategoriji Vermaovih modula je:

$$0 \to M_p(\lambda)_{k-1} \hookrightarrow M_p(\lambda)_k \to \bigodot^k U_- \otimes F_p(\lambda) \to 0$$

standardni morfizmi:

$\tau : G/B \to G/P$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_b(\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{O}_b(\mu) \\ \tau^0_* \downarrow & & \downarrow \tau^0_* \\ \mathcal{O}_p(\lambda) & \longrightarrow & \mathcal{O}_p(\mu) \end{array}$$

standardni

Kod Vermaovih modula:

$$\begin{array}{ccc} \bigoplus_{\alpha \in S_p} V(\sigma_\alpha \cdot \mu) & \dashrightarrow & \bigoplus_{\alpha \in S_p} V(\sigma_\alpha \cdot \lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \\ V(\mu) & \xrightarrow{h \neq 0} & V(\lambda) \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ M_p(\mu) & \underset{\text{(standardni)}}{\overset{\exists}{\dashrightarrow}} & M_p(\lambda) \end{array}$$

Skica: $M_p(\mu)$ ima svojstvo da je najveći kvocijent od $V(\mu)$ koji se nalazi u kategoriji $\mathcal{O}_p$. :

- kon. gen. $U(\mathfrak{g})$-moduli
- kao $U(\mathfrak{l})$-moduli su direktne sume kon. dim. ired. modula
- lokalno $\mathfrak{u}$-konačni

A vidi da je $\mathrm{Im}(\pi \circ h) \in \mathcal{O}_p$.

Proučimo prvo morfizme $V(\mu) \to V(\lambda)$, pa onda standardne/nestandardne $M_p(\mu) \to M_p(\lambda)$.

Teorem (Verma, BGG)

$\mu, \lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, ekvivalentno je:

i) $\exists$ ne-nul homomorfizam $V(\mu) \longrightarrow V(\lambda)$, (i takav je jedinstven do na skalar i injektivan)

ii) $L(\mu)$ je subkvocijent od $V(\lambda)$ (multiplicitet $\rightarrow$ Kazhdan Lusztigove slutnje; dosta netrivijalan)

iii) $\exists \beta_1, \ldots, \beta_n \in \Delta^+(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ takvi da

$$\mu = \sigma_{\beta_n} \cdots \sigma_{\beta_1} \bullet \lambda .$$

i $\langle (\sigma_{\beta_{p-1}} \sigma_{\beta_{p-2}} \cdots \sigma_{\beta_1} \bullet \lambda) + \rho, \beta_p^\vee \rangle \geq 0$

$\forall p = 1 .. n$

(μ i λ su jako povezani)

(nije teško dokazati dominantan integralan slučaj, ali općenito je komplicirano $\rightarrow$ Jantzenove filtracije.)

Teorem $\lambda \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ dominantan integralan za $\mathfrak{g}$,

$$\exists \ V(w \cdot \lambda) \xrightarrow{\neq 0} V(v \cdot \lambda) \iff v \leq w \text{ u } W_{\mathfrak{g}}$$

(i tada jedinstven do na skalar, injektivan.)

Primjer $SL(4,\mathbb{C})/B = \times\!-\!\times\!-\!\times$, $\lambda = \overset{0}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}$ (sing.)

$$\lambda+\delta = \overset{1}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{1}{\times} \xmapsto{\sigma_1} \overset{-1}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}\!-\!\overset{1}{\times} \xmapsto{\sigma_3} \overset{-1}{\times}\!-\!\overset{2}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times} \xrightarrow{\sigma_2} \overset{1}{\times}\!-\!\overset{-2}{\times}\!-\!\overset{1}{\times}$$

$\sigma_2\sigma_3\sigma_1 \cdot \lambda = \overset{0}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} = \mu$, i provjeri se uvjet (iii)

$\Rightarrow$ Postoji netrivijalan homomorfizam $V(\mu) \to V(\lambda)$

$\Rightarrow$ 〃 〃 invarijantan dif. operator $O_b(\lambda) \to O_b(\mu)$

$$\overset{0}{\times}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\times} \longrightarrow \overset{0}{\times}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\times}.$$

Slučaj generaliziranih Vermaovih modula:

<u>Teorem</u>: (nužan uvjet), μ, λ dominantni, integralni za p

Ako postoji netrivij. hom $M_p(\mu) \to M_p(\lambda)$, tada

1) postoji netriv. hom. $V(\mu) \to V(\lambda)$
2) $L(\mu)$ je subkvocijent od $M_p(\lambda)$

<u>Teorem</u> (Lepowski) (o standardnim morfizmima)

μ, λ dominantni integralni za p, takvi da $\exists\ V(\mu) \xrightarrow{\neq 0} V\lambda$,

Standardni morfizam $M_p(\mu) \to M_p(\lambda)$ je 0 akko i samo ako postoji ne-nul morfizam $V(\mu) \to V(\sigma_\alpha \cdot \lambda)$, za neki $\alpha \in S_p$

Primjer: Pokažimo da je standardni diferencijalni operator

$$\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

trivijalan.

$S_p = \{\sigma_1, \sigma_3\}$

$$\sigma_1 \cdot \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} = \overset{-2}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

Dovoljno je pokazati da postoji netrivijalan operator

$$V\left(\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) \longrightarrow V\left(\overset{-2}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right)$$

$$\sigma_2\sigma_3 \cdot \left(\overset{-2}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}\right) = \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\bullet}\!-\!\overset{0}{\bullet}$$

+ ostale pretpostavke iii)

$\Rightarrow$ standardni operator $\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \longrightarrow \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$ je 0.

Sjetimo se, pomoću Penroseove transformacije smo konstruirali ne-nul dif. operator $\overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-1}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet} \xrightarrow{\Box} \overset{0}{\bullet}\!-\!\overset{-3}{\times}\!-\!\overset{0}{\bullet}$, sada vidimo da je $\Box$ nestandardan.

Iz prethodnog teorema se pokaže sljedeći kriterij kad je λ dominantan

Teorem λ dominantan za $\mathfrak{g}$, integralan za $\mathfrak{p}$, $w, w' \in W^{\mathfrak{p}}$. Ekvivalentno je:

i) Standardni morfizam $M_{\mathfrak{p}}(w'.\lambda) \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}(w.\lambda)$ je 0.

ii) Postoji put od w do w' u $W_{\mathfrak{g}}$ koji prolazi kroz $\sigma_\alpha w$, za neki $\alpha \in S_{\mathfrak{p}}$

iii) Postoji put od w do w' u $W_{\mathfrak{g}}$ koji izlazi iz $W^{\mathfrak{p}}$

Korolar λ dominantan za $\mathfrak{g}$, integralan za $\mathfrak{p}$, $w, w' \in W^{\mathfrak{p}}$

t.d. $l(w') = l(w) + 1$

Standardni morfizam $M_{\mathfrak{p}}(w.\lambda) \longrightarrow M_{\mathfrak{p}}(w'.\lambda)$
postoji i nije nula, akko $w \longrightarrow w'$.

Teorem (BGG rezolucija, Lepowsky)

λ dominantan, integralan za $\mathfrak{g}$.
Postoji konačan egzaktan niz

$$\dots \to \bigoplus_{\substack{w \in W^{\mathfrak{p}} \\ l(w)=k}} M_{\mathfrak{p}}(w.\lambda) \to \dots \to \bigoplus_{\substack{\sigma_\alpha \in W^{\mathfrak{p}} \\ l(\sigma_\alpha)=1 \\ \text{t.j. } \alpha \in S \setminus S_{\mathfrak{p}}}} M_{\mathfrak{p}}(\sigma_\alpha.\lambda) \to M_{\mathfrak{p}}(\lambda) \longrightarrow L(\lambda) \longrightarrow 0$$

Morfizmi su direktne sume standardnih, i svi koji postoje su ne-nul.

Duali Vermaovih modula

Osim $M_\mathfrak{p}(\lambda)^* = \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(M_\mathfrak{p}(\lambda), \mathbb{C})$ s kontragredijentnim djelovanjem,

(sjetimo se: $M_\mathfrak{p}(\lambda) = \mathrm{ind}_\mathfrak{p}^\mathfrak{g} F_\mathfrak{p}(\lambda)$)

Imamo još i

$$M_\mathfrak{p}(\lambda)^\vee := \mathrm{pro}_\mathfrak{p}^\mathfrak{g} E_\mathfrak{p}(\lambda) := \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{p})}(U(\mathfrak{g}), E_\mathfrak{p}(\lambda))_{\mathfrak{l}\text{-konačan}}$$

$X \in U(\mathfrak{g})$, $(X f)(u) = f(uX)$ $\Rightarrow$ lijevi $U(\mathfrak{g})$-modul

$$M_\mathfrak{p}(\lambda)^\vee = \mathrm{Hom}_{U(\mathfrak{p})}(U(\mathfrak{g}), \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(F_\mathfrak{p}(\lambda), \mathbb{C}))_{\mathfrak{l}\text{-konačan}}$$

$$\cong \mathrm{Hom}_\mathbb{C}(U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F_\mathfrak{p}(\lambda), \mathbb{C})_{\mathfrak{l}\text{-konačan}}$$

$$\cong M_\mathfrak{p}(\lambda)^*_{\mathfrak{l}\text{-konačan}}$$

Pokaže se:

- Uzmemo PBW bazu $\{w_i\}$ za $M_\mathfrak{p}(\lambda) = U(\mathfrak{u}^-) \otimes_\mathbb{C} F_\mathfrak{p}(\lambda)$

  $\{w_i^\vee\}$ dualna baza

  $$M_\mathfrak{p}(\lambda)^\vee = \mathrm{span}_\mathbb{C}\{w_i^\vee\}$$

- $M_\mathfrak{p}(\lambda)^{\vee\vee} = M_\mathfrak{p}(\lambda)$

- $M_p(\lambda)^*$ definira konačan svežanj $J^\infty E_p(\lambda)$.

$M_p(\lambda)^\vee \subseteq M_p(\lambda)^*$ definira podsvežanj koji ima prereze koji se sastoje od mlazova polinomijalnih funkcija na G.

Algebarska Penroseova transformacija

$\hookrightarrow$ = globalizacija derivanih Zuckermanovih funktora.

$\mathfrak{r} = \mathfrak{l} \dot{+} \mathfrak{u}$ parabolička podalgebra

$\mathfrak{g} = \mathfrak{u}_- \dot{+} \mathfrak{r}$

$\mathfrak{r}^t = \mathfrak{l} \dot{+} \mathfrak{u}_-$

$\mathcal{E}_{\mathfrak{r}}$ = kategorija konačno-generiranih $\mathfrak{g}$-modula koji su kao $\mathfrak{l}$-moduli direktne sume ireducibilnih konačno dimenzionalnih

$\mathcal{O}_{\mathfrak{r}} \subseteq \mathcal{E}_{\mathfrak{r}}$, još i lokalno $U(\mathfrak{u})$-konačni

$K(\mathcal{O}_{\mathfrak{r}})$ = Grothendieckova grupa od $\mathcal{O}_{\mathfrak{r}}$

(= Abelova grupa generirana objektima iz $\mathcal{O}_{\mathfrak{r}}$ i relacijama $A + B = C$ za svaki egzaktni niz $0 \to A \to C \to B \to 0$)

Pokaže se da $K(\mathcal{O}_{\mathfrak{r}})$ ima dvije istaknute baze:

$\{M_{\mathfrak{r}}(\lambda)\}$ i $\{L(\lambda)\}$

$\mathcal{P}_R$ = kategorija holomorfnih homogenih vektorskih svežnjeva na G/R,

morfizmi = $\mathbb{C}$-linearni morfizmi snopova koji ispoštuju G-djelovanje

Postoji egzaktan funktor :

$$J_r^\infty : \mathcal{O}_R \longrightarrow \mathcal{O}_{rt}$$

$$J_r^\infty(\mathcal{F}) = \underbrace{\Gamma_\ell}_{\substack{\text{funktor koji uzme} \\ \text{samo } \ell\text{-konačne vektore}}} \mathcal{J}^\infty_{eR}(\mathcal{F})$$

(funktor iz geometrijske u algebarsku kategoriju)

Pokaže se : $\Gamma(G/R, -) = \Gamma_g \circ J_r^\infty$

Definiramo : $H^i(G/R, -) = \Gamma_g^i \circ J_r^\infty$ (J_r^∞ ima dobra homološka svojstva)

Za fibraciju $G/Q \xrightarrow{\tau} G/P$, K = levi faktor od P

gornja formula po vlaknima od τ postaje

$$J_p^\infty \circ \tau_*^i = \Gamma_K^i \circ J_q^\infty \ , \qquad \Gamma_K^i : \mathcal{O}_{qt} \to \mathcal{O}_{pt}$$

derivirani Zuckermanov funktor

$\Rightarrow$ algebarska Penroseova transformacija je

$$RP_p^r : \quad DO_{r^t} \hookrightarrow DO_{g^t} \xrightarrow{R\Gamma_k} DO_{p^t}$$

pullback faza   pushdown faza

Sjetimo se kohomološke indukcije:

$$(R_p^g)^i = \Gamma_k^i\left(\mathrm{pro}_r^g\left(- \otimes \Lambda^{top}\mathfrak{u}\right)\right)$$

Ako je $\tilde{\mathcal{F}}$ homogeni svežanj induciran reprezentacijom F,

$$J_r^\infty \tilde{\mathcal{F}} = \Gamma_e \, J_{eR}^\infty(\tilde{\mathcal{F}}) = \Gamma_e \left(\mathrm{ind}_1^g F\right)^* = \left(\mathrm{ind}_1^g F\right)^\vee = \mathrm{pro}_r^g F$$

Alg. Penroseova transf. od $\tilde{\mathcal{F}}$ = kohomološka indukcija od F
(do na u-twist)

$$\overbrace{RP_r^p \circ J_r^\infty}^{\text{koh. indukcija}} = J_p^\infty \circ RP_R^p$$

5.5.2015.

BGG rezolucija

G kompleksna poluprosta Liejeva grupa, povezana i jednostavno povezana, $P \subseteq G$ parabolička podgrupa.

Prošli put vidjeli:

Postoji egzaktna kontravarijantna korespondencija
(nismo komentirali, ali nije teško vidjeti)

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{homogeni svežnjevi/snopovi} \\ \text{na } G/P \text{, i invarijantni} \\ \text{diferencijalni operatori} \\ \mathcal{O}_P(\lambda) = \text{snop holomorfnih} \\ \text{prereza od} \\ G \times_P E_P(\lambda) \\ \text{(Analitičko/holomorfno} \\ \text{induciranje reprezentacija} \\ \text{– geometrijska kategorija)} \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1-1} \left\{ \begin{array}{c} \text{generalizirani Vermaovi} \\ \text{moduli i } \mathfrak{g}\text{-homomorfizmi} \\ M_P(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{p})} F_P(\lambda) \\ \text{(Algebarsko induciranje} \\ \text{reprezentacija – algebarska kategorija)} \end{array} \right\}$$

Pri tome $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ dominantne za $\mathfrak{p}$ integralne za $\mathfrak{g}$.

Cilj: Dokazati teorem o BGG-rezoluciji za kon. dim. reprezentacije od $\mathfrak{g}$ u bilo kojoj od te dvije kategorije.

1° korak: Pokazat ćemo u geometrijskoj kategoriji:

Ako $\exists$ BGG-rezolucija od $E(\lambda)$ na G/B, ($B \subseteq P$ Borelova)
tada $\exists$ BGG-rezolucija od $E(\lambda)$ na G/P.

U geometrijskoj kategoriji, $E(\lambda)$ = lokalno konstantan snop s prerezom $E(\lambda)$.

2°) Korak: Konstruirati BGG-rezoluciju u algebarskoj kategoriji pravih Vermaovih modula, tj. $M_{\mathfrak{b}}(\lambda) = U(\mathfrak{g}) \otimes_{U(\mathfrak{b})} \mathbb{C}_\lambda$.

[Humphreys: Representations of Semisimple Lie Algebras in the BGG Category $\mathcal{O}$

u knjizi ima počišćena verzija originalnog dokaza
Bernstein, Gelfand, Gelfand: Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules.

Postoji i konstrukcija u kategoriji generaliziranih Vermaovih modula:
Lepowsky: A generalization of BGG-resolution,

Ali poziva se na neke članke o ∞-dim. Liejevim algebrama
(Kac-Moodyjeve Liejeve algebre)]

Diskutujemo 1. korak.
$\lambda \in \mathfrak{h}^*$ dominantna integralna za $\mathfrak{g}$.
Sjetimo se BGG rezolucije na G/B:

$$0 \to E(\lambda) \to \Delta_b^{\bullet}(\lambda), \qquad \Delta_b^k(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{g}} \\ l(w)=k}} \mathcal{O}_b(w.\lambda)$$

gdje su diferencijali $\Delta_b^k(\lambda) \to \Delta_b^{k+1}(\lambda)$ direktne sume operatora

$$\mathcal{O}_b(w.\lambda) \to \mathcal{O}_b(v.\lambda), \qquad w \to v \text{ u } W, \text{ tj.}$$

$$l(v) = l(w)+1$$

(diferencijali su G-invarijantni) $\qquad v = \sigma_\alpha w, \quad \alpha \in \Delta^+(\mathfrak{g},\mathfrak{h})$

Želimo dobiti egzaktan niz snopova na G/P oblika

$$0 \to E(\lambda) \to \Delta_P^0(\lambda), \quad \text{gdje je} \quad \Delta_P^k(\lambda) = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{g}}^P \\ \ell(w)=k}} \mathcal{O}_P(w.\lambda)$$

Koristiti ćemo fibraciju $\pi : G/B \to G/P$, tj. direktnu sliku $\pi_* : Sh(G/B) \to Sh(G/P)$, koja je lijevo egzaktna, i njene desno-derivirane funktore $\pi_*^i : Sh(G/B) \to Sh(G/P)$

Sjetimo se kako se računaju π_*^i na homogenim snopovima:
(to smo dokazali iz pomoć Bott-Borel-Weila, i leme o redukciji na slojevima)

$\mu \in \mathfrak{h}^*$ integralan za $\mathfrak{g}$.

1°) Ako je μ nesingularan za P, tj. $\exists!\, w \in W_P \subseteq W_{\mathfrak{g}}$ $w.\mu$ dominantan za P, tada

$$\pi_*^i(\mathcal{O}_b(\mu)) = \begin{cases} \mathcal{O}_P(w.\mu) & : i = \ell(w) \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

2°) Ako je μ singularan za P, tj. $\forall w \in W_P$ $w.\mu$ nije dominantan za P, tj. stabilizator afinog djelovanja u W_P od μ je netrivijalan, tada

$$\pi_*^i(\mathcal{O}_b(\mu)) = 0 \quad \forall i.$$

Postoji spektralni niz hiperderiviranih funktora od π_* (ili spektralni niz hiperdirektne slike)

$$E_1^{pq} = \pi_*^q\left(\Delta_b^p(\lambda)\right) = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{g}} \\ \ell(w)=p}} \pi_*^q\left(\mathcal{O}_b(w.\lambda)\right) \Longrightarrow \pi_*^{p+q}(E(\lambda))$$

[Izveli smo prije spektralni niz hiperkohomologije, tj. spektralni niz hiperderiviranih funktora od Γ.
Potpuno isti izvod je i za π (Γ je poseban slučaj od π), ali i za bilo koji drugi lijevo egzaktni funktor.]

Izračunat ćemo tablicu E_1^{pq}, i limes $\pi_*^{p+q}(E(\lambda))$.

Nulti redak:

$$\pi_*^0\left(\mathcal{O}_b(w.\lambda)\right) = \begin{cases} \mathcal{O}_p(w.\lambda) & : w.\lambda \text{ dominantan za } p \\ 0 & : \text{inače} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathcal{O}_p(w.\lambda) & : w \in W^p \\ 0 & : \text{inače}. \end{cases}$$

Da li $w \in W^p$, dovoljno je da neku dominantnu za $\mathfrak{g}$ afino šalje u dominantnu za p.

$$\Rightarrow \quad E_1^{k,0} = \bigoplus_{\substack{w \in W_{\mathfrak{g}}^p \\ \ell(w)=k}} \mathcal{O}_p(w.\lambda) = \Delta_p^k(\lambda)$$

i morfizmi su direktne slike morfizama na Bottovoj

$\Downarrow$

morfizmi su standardni.

Dakle, nulti redak je točno ono što želimo dokazati da je rezolucija od $E(\lambda)$ na G/P.

Dokažimo da su ostali retci više-manje isto to.

Sjetimo se Leme [Kostant] :

$\forall w \in W_g \ \exists!$ rastav $w = w_p w^p$, $w_p \in W_p$, $w^p \in W^p$ (*)

$$l(w) = l(w_p) + l(w^p) \quad , \quad W_g = \bigcup^{\text{disjunktan}}_{w_p \in W_p} w_p \cdot W^p$$

Što će biti u prvom retku: $E_1^{p,1} = \bigoplus_{\substack{w \in W_g \\ l(w)=p}} \pi_*^1 \mathcal{O}_b(w.\lambda)$?

Preživjet će samo oni članovi s $w \in W_g$ koji imaju svojstvo da postoji $w' \in W_p$, $l(w') = 1$ td $w'w.\lambda$ dominantan za P, i tada $\pi_*^1 \mathcal{O}_b(w.\lambda) = \mathcal{O}_p(w'w.\lambda)$, $w'.w \in W^p$

$$w = w_p w^p$$

$$w'w = \underbrace{w' w_p}\, w^p \quad \in W^p$$

zbog jedinstvenosti $w_p = (w')$

$$\pi_*^1 \mathcal{O}_b(w.\lambda) = \begin{cases} \mathcal{O}_p(w^p.\lambda) & : \ l(w_p) = 1 \\ 0 & : \ \text{inače} \end{cases}$$

Ako $\exists!$ $w_p \in W_p$, $l(w_p) = 1$, onda zbog (*) i prethodne formule, $E_1^{p,1}$ je isto što i $E_1^{p,0}$ pomaknut za jedno mjesto u desno.

Ako imamo m_1 elemenata iz W_p duljine 1, onda je

$$E_1^{p,1} = \left(E_1^{p,0} \text{ pomaknut za jedno mjesto desno}\right) \times \text{multiplicitet } m_1$$

Potpuno isto za bilo koji redak:

$$\pi_*^q\left(\mathcal{O}_b(w.\lambda)\right) = \begin{cases} \mathcal{O}_p(w^p.\lambda) & : \ l(w_p) = q \\ 0 & : \ \text{inače} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} q\text{-ti redak} \\ \text{od } E_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\text{-ti redak} \\ \text{od } E_1 \\ \text{počevši od} \\ \text{q-tog} \\ \text{mjesta} \end{pmatrix} \text{ s multiplicitetom } \underbrace{\#\{w \in W_p : l(w) = q\}}_{= m_q}$$

(napomena: π_*^q također daje standardne morfizme, jer je π_*^q isto što i π_*^0 na nekim drugim snopovima)

$$E_1^{p2} = \begin{array}{lllllll} & & & & & & \\ 0 & 0 & \mathcal{O}_p(\lambda)^{m_2} \longrightarrow & \Delta_p^1(\lambda)^{m_2} \longrightarrow & \Delta_p^2(\lambda)^{m_2} \longrightarrow \dots & & \\ 0 & \mathcal{O}_p(\lambda)^{m_1} \longrightarrow & \Delta_p^1(\lambda)^{m_1} \longrightarrow & \Delta_p^2(\lambda)^{m_1} \longrightarrow & \dots & & \\ \mathcal{O}_p(\lambda) \longrightarrow & \Delta_p^1(\lambda) \longrightarrow & \Delta_p^2(\lambda) \longrightarrow & \dots & & & \end{array}$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{Želimo dokazati egzaktnost}}$

$0 \to E(\lambda) \to \mathcal{O}_b(\lambda) \to \Delta'_b(\lambda)$ egzaktan niz / $\pi_*^0 = \pi_*$ lijevo egzaktan

$0 \to \underbrace{\pi_* E(\lambda)}_{= E(\lambda)} \to \mathcal{O}_p(\lambda) \to \Delta'_p(\lambda)$ egzaktan niz

(lako se provjeri jer je π lokalno projekcija produkta)

$$E_2^{pq} = \begin{array}{|cccccccccc}
0 & - & - & 0 & 0 & - & - & 0 & 0 & 0 \\
0 & - & 0 & E(\lambda) & H_1 & - & - & H_k & 0 & 0 \\
\vdots & & & & & & & & & \vdots \\
0 & E(\lambda)^{m_1} & H_1^{m_1} & \dots & H_k^{m_1} & 0 & & & & \\
E(\lambda) & H_1 & H_2 & \dots & H_k & 0 & 0 & - & 0 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

trebamo pokazati da su ovi $H_i = 0$.

Neka je k najveći t.d. $H_k \neq 0$.

najviši ne-nul redak nalazi se na visini r koja je jednaka duljini najduljeg elementa iz W_p (jedinstven takav, zato je multiplicitet u tom redu $= 0$), a to je

$$r = |\Delta^+(\mathfrak{l}, \mathfrak{h})| = \dim_{\mathbb{C}} \left(L_s / L_s \cap B \right) = \dim_{\mathbb{C}} P/B$$

$= \dim_{\mathbb{C}}$ vlakna od π

H_k će „preživjeti" cijeli spektralni niz do E_∞, jer je stalno jedini ne-nul na pravcu kojeg odvode diferencijali.

U E_∞ je i dalje jedini na pravcu $p+q = 2r+k$

$$\Rightarrow \quad \pi_*^{2r+k}(E(\lambda)) = H_k$$

Međutim, $\pi_*^{2r+k}(E(\lambda))\Big|_{\text{nlat}} = H^{2r+k}(P/B, E(\lambda))$

i dalje lokalno konstantan snop, kad se restringira na vlakno

$E(\lambda)$ nisu presjeci holomorfnog vektorskog svežnja, pa ne možemo koristiti izomorfizam snopovske i Dolbeaultove kohomologije i zaključiti iščezavanje iznad stupnja $r = \dim_{\mathbb{C}}(P/B)$.

Ali kohomologija lok. konst. snopa s presjecima $E(\lambda)$ $\underset{\text{teorem iz topologije}}{\overset{\text{netrivijalni klasični}}{=}}$ Singularna kohomologija od P/B s koef. u $E(\lambda)$

$=$ de Rhamova kohomologija od realne mnogostrukosti P/B s koef. u $E(\lambda)$

$= 0$ za stupnjeve $> \dim_{\mathbb{R}} G/P = 2r$.

Dakle, H_k je snop koji ima sve vlati $= 0$, $\Rightarrow H_k = 0$

$\Rightarrow$ Niz $0 \longrightarrow E(\lambda) \longrightarrow \Delta_p^\bullet(\lambda)$ je egzaktan,

i to je tražena BGG rezolucija na G/p.

Usput, dobili smo

$$E_2^{pq} = \begin{array}{|llllll} 0 \; \cdots & 0 & E(\lambda) & 0 & 0 & \cdots \\ & & & & & \\ 0 & E(\lambda)^{m_1} & 0 & 0 & \cdots & \\ E(\lambda) & 0 & 0 & \cdots & & \\ \hline \end{array} = E_\infty^{pq}$$

$\Rightarrow \quad \pi_*^s(E(\lambda)) =$ lok. konst. snop s prerezima

$$= \begin{cases} 0 & : s \text{ neparan} \\ E(\lambda)^{m_{s/2}} & : s \text{ paran} \end{cases}$$

(s multiplicitetom $m_{s/2} = \#\{w \in W_p : l(w) = \frac{s}{2}\}$)

$$\Rightarrow H^s(P/B, E(\lambda)) = \begin{cases} 0 & : s \text{ neparan} \\ E(\lambda)^{m_{s/2}} & : s \text{ paran} \end{cases}$$

($H^s(P/B, E(\lambda))$ se može elementarno izračunati kao ćelijska kohomologija, koristeći Schubertove ćelije.)